2) Solution satisfaisant aux conditions initiales

Propriété

L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une **unique solution** f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant deux conditions initiales données comme $\begin{cases} f(x_0) & = & y_0 \\ f'(x_1) & = & y_1 \end{cases}$

Exemple

On considère l'équation (E) : $y'' + 4y = 0$ dont la solution vérifie les conditions initiales :
$f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

- Résolution de l'équation différentielle générale :
  (E) $\Longleftrightarrow y'' + 2^2 y = 0\,;$ les solutions sont donc : $f(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$.
- Utilisation de la première condition :
  $f(0) = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) = \lambda \times 1 + \mu \times 0 = \lambda$.
  Sachant que $f(0) = 1$, on obtient $\lambda = 1$.
- Utilisation de la seconde condition :
  $f'(x) = -2\lambda \sin(2x) + 2\mu \cos(2x)$.
  $f'(0) = -2 \times 1 \sin(0) + 2\mu \cos(0) = -2 \times 0 + 2\mu \times 1 = 2\mu$.
  Sachant que $f'(0) = 2$, on obtient $2\mu = 2$ et donc $\mu = 1$.

Conclusion : $f(x) = cos(2x) + \sin(2x)$.