Chapitre 13 :Équation différentielle du second ordre

1 Résolution

Propriété

Soit l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non nul et y une fonction de la variable x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' + 9y = 0$

(E_1) s'écrit aussi $y'' + 3^2 y = 0$, on a donc $\omega = 3$.

Les solutions sont du type $\boxed{f(x) = \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)}$ où λ et μ sont des réels.

Méthode

- On écrit l'équation différentielle sous la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$ en effectuant quelques opérations sur l'équation.
- On détermine la valeur de ω dans l'équation.
- On utilise la formule solution de la propriété

Exemple

Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $27y'' + 3y = 0$:

En divisant par 27, (E_2) s'écrit aussi $y'' + \dfrac{3}{27}y = 0$,

C'est à dire : $y'' + \dfrac{1}{9}y = 0$

ou encore $y'' + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 y = 0$, on a donc $\omega = \dfrac{1}{3}$.

Les solutions sont du type $f(x) = \lambda\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right) + \mu\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right)$ où λ et μ sont des réels.