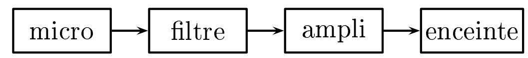
Exercice 1
Question 1
On a $z_A = x + 2\mathrm{i}$, avec $x > 0$.
Or A appartient au cercle de centre O et de rayon 4, donc $OA^2 = x^2 + 2^2 = 4^2$ ou $x^2 = 12$ et donc $x = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$.
On a donc $z_A = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$: réponse **c.**

Question 2
$z = -2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ qui a pour conjugué $\overline{z} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$. Réponse **c.**

Exercice 2
Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres.
Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence f, exprimée en Hertz (Hz).



Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide de deux nombres complexes z_R et z_C.
Dans tout l'exercice, on suppose que $z_R = 10$ et $z_C = -\dfrac{1\,000\sqrt{3}}{f}\mathrm{i}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A : Effet du filtre sur un son grave

1. **Montrer que $z_C = -10\sqrt{3}\mathrm{i}$.** $z_C = -\dfrac{1\,000\sqrt{3}}{100}\mathrm{i} = -10\sqrt{3}\mathrm{i}$.
2. **a. Déterminer la forme exponentielle de z_C.** Avec $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, on a $z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times 10\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 10\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

   b. On considère le nombre complexe $Z = z_R + z_C$. On a donc $Z = 10 - 10\sqrt{3}\mathrm{i}$.
   Déterminer la forme exponentielle de Z. $|Z|^2 = 10^2 + \left(-10\sqrt{3}\right)^2 = 100 + 300 = 400 = 20^2$, d'où $|Z| = 20$.
   Donc $Z = 20\left(\dfrac{10}{20} - \mathrm{i}\dfrac{10}{20}\sqrt{3}\right) = 20\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20\left(\cos -\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin -\dfrac{\pi}{3}\right) = 20\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   c. On considère le nombre complexe z_G défini par : $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$.
   Montrer que $z_G = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C} = \dfrac{10\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}}{20\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{9\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   d. Le module du nombre complexe z_G est appelé gain du filtre.
   Donner la valeur exacte du gain du filtre puis une valeur approchée au centième. On a $|z_G| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Une valeur approchée de ce gain est 0,866 025, soit 0,87 au centième près.

Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

On choisit un son aigu de fréquence $f = 1\,000\sqrt{3}$.

1. **Montrer que le nombre complexe z_G défini par $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$ est égal à $\dfrac{-\mathrm{i}}{10 - \mathrm{i}}$.** $z_C = -\dfrac{1\,000\sqrt{3}}{1\,000\sqrt{3}}\mathrm{i} = -\mathrm{i}$
   $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C} = \dfrac{-\mathrm{i}}{10 - \mathrm{i}}$.
2. **Déterminer la forme algébrique de z_G.** $z_G = \dfrac{-\mathrm{i}}{10 - \mathrm{i}} = \dfrac{-\mathrm{i}(10 + \mathrm{i})}{(10 - \mathrm{i})(10 + \mathrm{i}} = \dfrac{1 - 10\mathrm{i}}{100 + 1} = \dfrac{1}{101} - \mathrm{i}\dfrac{10}{101}$.
3. **Calculer la valeur exacte du gain du filtre $|z_G|$ et en donner une valeur approchée au centième.** On a $|z_G|^2 = \left(\dfrac{1}{101}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{101}\right)^2 = \dfrac{101}{101^2} = \dfrac{1}{101}$.
   Donc le gain du filtre est égale à :
   $|z_G| = \sqrt{\dfrac{1}{101}} = \dfrac{1}{\sqrt{101}} \approx 0{,}099\,5$ soit environ 0,10 au centième.