Sujet d'entraînement : Logarithme

Exercice 2 **5 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

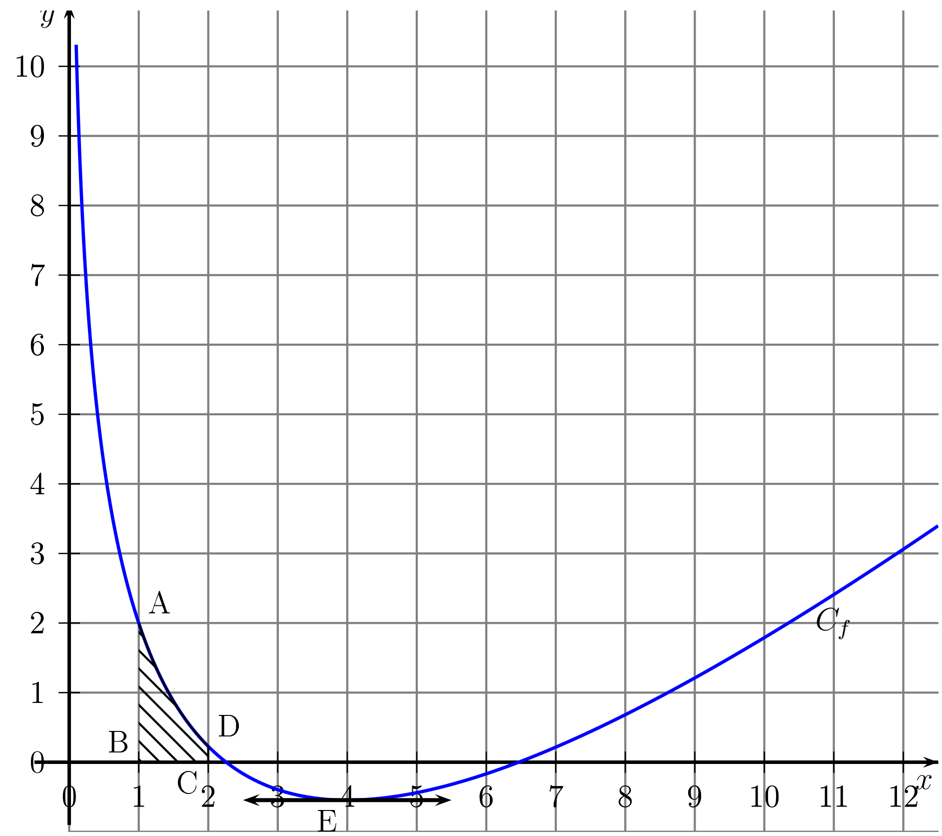
Dans cet exercice, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b\ln(x) + 1$$

où a et b sont deux nombres réels.
C_f est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.
Les points A et E sont deux points de la courbe C_f.
Le point A a pour coordonnées $(1\,;\,2)$ et le point E a pour abscisse 4.
La tangente à C_f au point E est horizontale.



1. Déterminer $f(1)$ et $f'(4)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(4)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4\ln(x) + 1$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ en justifiant la réponse. Donner une interprétation graphique du résultat.

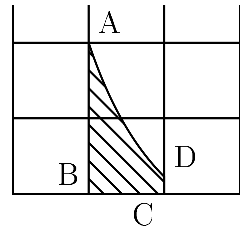
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en justifiant la réponse (on pourra factoriser l'expression de $f(x)$ par x).

3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau des variations de f.

Partie C

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.

La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique de la page précédente.
On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.
Le point D est le point de la courbe C_f d'abscisse 2.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,0)$ et $(2\,;\,0)$.



Soit la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$G(x) = x\ln(x) - x.$$

1. Calculer la dérivée G' de G.

2. En déduire une primitive F de la fonction f donnée dans la partie B sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la pièce en unité d'aire ; puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2}.