EXERCICE II

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. a. Donner $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes, notées Δ_1 et Δ_2.
Donner leurs équations respectives.

2. a. f' désigne la dérivée de f.

Justifier que, pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

b. Dresser le tableau des variations de f.

3. a. Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b. Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

4. Tracer les droites Δ_1, Δ_2, T_0 puis la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie B

On considère les intégrales I et J définies par

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx.$$

1. On considère les fonctions h et H définies par :

$$\text{pour tout réel } x,\ h(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right).$$

a. Justifier l'égalité : $\dfrac{e^2+1}{e^{-2}+1} = e^2$.

b. Justifier que H est une primitive de h.

c. Déduire des questions précédentes que $J = 1$. Détailler le calcul.

2. Calculer la somme $I + J$. Détailler le calcul.

3. En déduire la valeur de I.

4. Hachurer, sur la figure de la question A 4., le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut I.