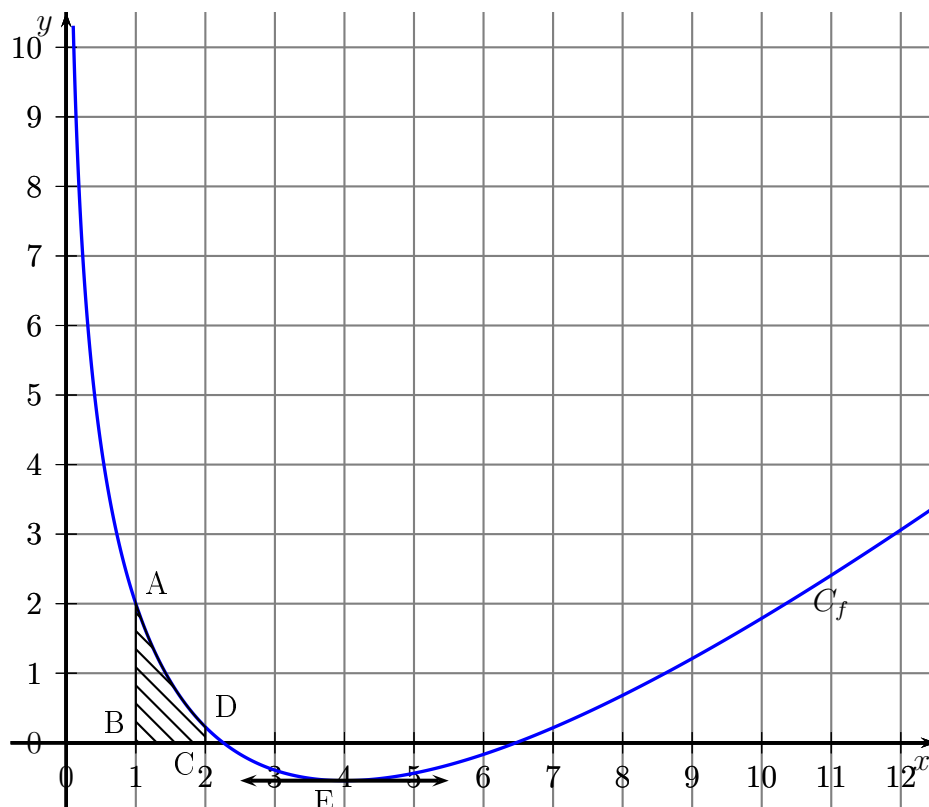




EXERCICE 2

5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b \ln(x) + 1$ où a et b sont deux réels.

C_f est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.

Les points A et E sont deux points de la courbe C_f .

Le point A a pour coordonnées $(1; 2)$ et le point E a pour abscisse 4.

La tangente à C_f au point E est horizontale.

1. D'après le graphique, on voit que $f(1) = 2$.

Comme la tangente à C_f au point E d'abscisse 4 est horizontale, on peut dire que $f'(4) = 0$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = a + \frac{b}{x}$

3. $f(x) = ax + b \ln(x) + 1$

$$f(1) = 2 \iff a + b \ln(1) + 1 = 2 \iff a = 1$$

$$f'(x) = a + \frac{b}{x} \text{ et } a = 1 \text{ donc } f'(x) = 1 + \frac{b}{x}; f'(4) = 0 \iff 1 + \frac{b}{4} = 0 \iff b = -4$$

On a $a = 1$ et $b = -4$ donc $f(x) = x - 4 \ln(x) + 1$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 4 \ln(x) + 1$.

1.
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0} -4 \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

On peut en déduire que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe C_f .

2. Pour tout $x > 0$: $f(x) = x \left(1 - 4 \frac{\ln(x)}{x} \right) + 1$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 4 \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 4 \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{4}{x}$.

On résout dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{4}{x} > 0 \iff \frac{x-4}{x} > 0 \iff x > 4 \text{ puisque } x > 0.$$

On calcule la valeur du minimum : $f(4) = 4 - 4 \ln(4) + 1 = 5 - 4 \ln(4) \approx -0,55$.

D'où le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$:

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$5 - 4 \ln(4)$	$+\infty$

Partie C

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.

La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique précédent.

On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.

Le point D est le point de la courbe C_f d'abscisse 2.

Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1; 0)$ et $(2; 0)$.

Soit la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par $G(x) = x \ln(x) - x$.

1. $G'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

2. La fonction $x \mapsto x + 1$ a pour primitive $x \mapsto \frac{x^2}{2} + x$ donc la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par

$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - 4G(x)$ est une primitive de la fonction f .

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - 4(x \ln(x) - x) = \frac{x^2}{2} + x - 4x \ln(x) + 4x = \frac{x^2}{2} + 5x - 4x \ln(x)$$

3. L'aire de la plaque est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Comme la fonction f est positive sur $[1; 2]$, cette aire est égale à l'intégrale : $I = \int_1^2 f(t) dt$

$$I = \int_1^2 f(t) dt = F(2) - F(1) = \left(\frac{4}{2} + 10 - 8 \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{2} + 5 - 4 \ln(1)\right) = 12 - 8 \ln(2) - \frac{11}{2} =$$

$$\frac{13}{2} - 8 \ln(2)$$

$\approx 0,95$ unité d'aire.

