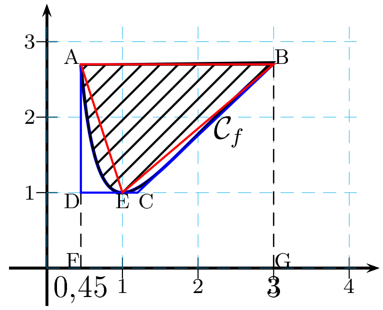
Exercice 4 **6 points**



1. Avec la précision du dessin soient les points :
A(0,45 ; 2,7) ; B(3 ; 2,7) ; C(1,2 ; 1) ; D(0,45 ; 1) et E(1 ; 1).
On a aire (ABC) $= \dfrac{1,65 \times 1,7}{2} = 1{,}402\,5$.
aire (ABCD) $= \dfrac{2,55 + 0,75}{2} \times 1,7 = 2,805$.
Comme l'aire de l'aileron est comprise entre l'aire du triangle et celle du trapèze, on peut estimer cette aire à environ 2,5 carreaux.
2. On lit $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.
3. La fonction f est donc définie par $f(x) = \dfrac{4}{x} - 3 + 4\ln(x)$, d'où :
   - $f(1) = \dfrac{4}{1} - 3 + 4\ln(1) = 4 - 3 = 1$;
   - $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 4\dfrac{1}{x}$, d'où $f'(1) = -4 + 4 = 0$.

   Conclusion : le choix de $a = 4$ et $b = -3$ répond au problème posé.
4. La fonction F est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$F'(x) = 4\ln(x) + \dfrac{4x+4}{x} - 7 = 4\ln(x) + 4 + \dfrac{4}{x} - 7 = \dfrac{4}{x} - 3 + 4\ln(x) = f(x)$.
5. On a vu que $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 4\dfrac{1}{x} = \dfrac{4x-4}{x^2}$.
Comme $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $4x - 4$.
   - $4x - 4 > 0$ si $x > 1$, donc f est croissante pour $x > 1$;
   - $4x - 4 < 0$ si $x < 1$, donc f est décroissante si $x < 1$.

   $f(1)$ est donc le minimum de la fonction et $f(1) = 1$.
Le minimum de f étant positif, la fonction f est positive.
L'aire de l'aileron est donc égale à l'aire du trapéze ABGH et de l'aire de la surface limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales contenant respectivement A et B d'équations respectives $x = 0,45$ et $x = 3$. Or cette dernière aire est égale en unités d'aire à l'intégrale de f entre $x = 0,45$ et $x = 3$.
On a $f(3) = \dfrac{4}{3} - 3 + 4\ln(3) = 4\ln 3 - \dfrac{5}{3}$;
$f(0,45) = f\left(\frac{9}{20}\right) = \dfrac{4}{\frac{9}{20}} - 3 + 4\ln\left(\frac{9}{20}\right) = \dfrac{80}{9} - 3 + 4\ln\left(\frac{9}{20}\right) = \dfrac{53}{9} + 4\ln\left(\frac{9}{20}\right)$.
L'aire de l'aileron est donc égale à :
$\dfrac{f(0,45) + f(3)}{2} \times (3 - 0,45) - \displaystyle\int_{0,45}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{f(0,45) + f(3)}{2} \times (3 - 0,45) - [F(x)]_{0,45}^{3} =$
$\dfrac{f(0,45) + f(3)}{2} \times (3 - 0,45) - F(3) + F(0,45) \approx 2,555$ unités d'aire.
Comme l'unité sur chaque axe est 10 cm, l'unité d'aire est égale à 100 cm^2, donc l'aire au cm^2 près de l'aileron est 255 cm^2.