Exercice 3

A– Étude de la fonction représentée par la courbe($\mathcal{C}$)

1. $f(0) = 4$.

Or $\quad f(0) = 4 \iff k - 0,5\left(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\right) = 4 \iff k - 0.5 \times 2 = 4 \iff k = 5$

Donc on a bien : $\quad f(x) = 5 - 0,5\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right)$

2. $f(4) = f(-4) = 5 - 0,5\left(\mathrm{e}^{0,8} + \mathrm{e}^{-0,8}\right) \approx 3,7$ à 10^{-1} près.

Cette valeur correspond à la hauteur sous le pont en bordure de chaussée pour véhicules motorisés.

En tenant compte de la hauteur de sécurité de 50 cm, on en déduit que la hauteur maximale exprimée en mètre d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous le pont est de $3,2$ mètres, à 10^{-1} près.

3. Pour tout réel x de $[-8~;~8]$, on a :

$f'(x) = -0,5\left(0,2\mathrm{e}^{0,2x} - 0,2\mathrm{e}^{-0,2x}\right) = -0,1\mathrm{e}^{0,2x} + 0,1\mathrm{e}^{-0,2x}$

Or
$$\begin{aligned} 0,1\mathrm{e}^{-0,2x}\left(1 - \mathrm{e}^{0,4x}\right) &= 0,1\mathrm{e}^{-0,2x} - 0,1\mathrm{e}^{-0,2x}\mathrm{e}^{0,4x} \\ &= 0,1\mathrm{e}^{-0,2x} - 0,1\mathrm{e}^{-0,2x+0,4x} \\ &= 0,1\mathrm{e}^{-0,2x} - 0,1\mathrm{e}^{0,2x} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

4. Pour tout réel x , le facteur $0,1\mathrm{e}^{-0,2x}$ est strictement positif.

Donc $f'(x)$ est du signe de $\left(1 - \mathrm{e}^{0,4x}\right)$ sur $[-8~;~8]$.

Or $\quad 1 - \mathrm{e}^{0,4x} > 0 \iff \mathrm{e}^{0,4x} < 1 \iff 0,4x < \ln 1 \iff 0,4x < 0 \iff x < 0$

Tableau de variation de f sur $[-8~;~8]$:

x	-8		0		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-8)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$f(8)$

B– Calculs d'aires

1.
$$\begin{aligned} I &= \int_{-8}^{8} \left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{0,2x} + \frac{1}{-0,2}\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_{-8}^{8} \\ &= \left(\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{1,6} - \frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-1,6}\right) - \left(\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-1.6} - \frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{1,6}\right) \\ &= \frac{1}{0,1}\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right) \end{aligned}$$

2. L'aire de la façade exprimée en m^2 vaut :

$$\mathcal{A} = \int_{-8}^{8} (5 - f(x))\ \mathrm{d}x = \int_{-8}^{8} \left(5 - \left(5 - 0,5\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right)\right)\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-8}^{8} \left(0,5\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right)\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= 0,5I = 0,5 \times \frac{1}{0,1}\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right) = 5\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right)$$

3. $S = 2 \times 5\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right) = 10\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right) \approx 47,51 \quad \mathrm{m}^2$ à 10^{-2} près.

4. Nombre de bidons nécessaires : $N = \dfrac{S}{3 \times 5} \approx 3,2$ Donc 4 bidons seront nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction.