Variables aléatoires continues

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2020-2021

Considérons une variable aléatoire susceptible de prendre n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné. Cet intervalle peut être $[0; 1]$ ou $\mathbb{R}$ par exemple. Une telle variable aléatoire est dite continue.

Considérons une variable aléatoire susceptible de prendre n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné. Cet intervalle peut être $[0; 1]$ ou $\mathbb{R}$ par exemple. Une telle variable aléatoire est dite continue.
La durée de vie d'une ampoule électrique est un exemple de variable aléatoire continue. Dans ce cas, les valeurs prises sont dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Considérons une variable aléatoire susceptible de prendre n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné. Cet intervalle peut être $[0;1]$ ou $\mathbb{R}$ par exemple. Une telle variable aléatoire est dite continue.
La durée de vie d'une ampoule électrique est un exemple de variable aléatoire continue. Dans ce cas, les valeurs prises sont dans l'intervalle $[0;+\infty[$.
L'ensemble des valeurs étant infini, la probabilité d'obtenir exactement une valeur particulière est nulle en général. On cherchera donc plutôt à déterminer des probabilités du type $P(X \in I)$, où I est un intervalle, par exemple $P(a \leq X \leq b)$.

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a; b]$. Si X prend toutes les valeurs de $[a; b]$, on dit que X est ....

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a; b]$. Si X prend toutes les valeurs de $[a; b]$, on dit que X est continue.

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a; b]$. Si X prend toutes les valeurs de $[a; b]$, on dit que X est continue. Dans ce cas, la densité de probabilité de la variable aléatoire X est ....

....

....

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a; b]$. Si X prend toutes les valeurs de $[a; b]$, on dit que X est continue. Dans ce cas, la densité de probabilité de la variable aléatoire X est une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a; b]$. Si X prend toutes les valeurs de $[a; b]$, on dit que X est continue. Dans ce cas, la densité de probabilité de la variable aléatoire X est une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Le produit $f(x)\mathrm{d}x$ joue, pour une variable aléatoire continue, le même rôle que la probabilité $P(x)$ pour une variable aléatoire discrète. La "somme des probabilités" est ici représentée par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et vaut 1.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $I = [a; b]$, de densité f et J un intervalle inclus dans I, par exemple $J = [u; v]$.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $I = [a; b]$, de densité f et J un intervalle inclus dans I, par exemple $J = [u; v]$.

• La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, est ....
....

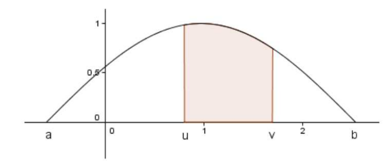
Propriétés

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $I = [a; b]$, de densité f et J un intervalle inclus dans I, par exemple $J = [u; v]$.

• La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, est l'aire du domaine défini par $x \in J$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Propriétés
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $I = [a; b]$, de densité f et J un intervalle inclus dans I, par exemple $J = [u; v]$.

• La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, est l'aire du domaine défini par $x \in J$ et $0 \leq y \leq f(x)$.



- Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) =$ ....

- Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f.

- Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = \ldots$

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : ....
....

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : $P(u \leq X \leq v) = P(u < X \leq v) = P(u \leq X < v) = P(u < X < v)$.

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : $P(u \leq X \leq v) = P(u < X \leq v) = P(u \leq X < v) = P(u < X < v)$.

• L'événement $(X > u)$ est l'événement contraire de l'événement $(X \leq u)$, d'où : ....

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : $P(u \leq X \leq v) = P(u < X \leq v) = P(u \leq X < v) = P(u < X < v)$.

• L'événement $(X > u)$ est l'événement contraire de l'événement $(X \leq u)$, d'où : $P(X > u) = 1 - P(X \leq u)$.

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : $P(u \leq X \leq v) = P(u < X \leq v) = P(u \leq X < v) = P(u < X < v)$.

• L'événement $(X > u)$ est l'événement contraire de l'événement $(X \leq u)$, d'où : $P(X > u) = 1 - P(X \leq u)$.

• $P(u \leq X \leq v) =$......................

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : $P(u \leq X \leq v) = P(u < X \leq v) = P(u \leq X < v) = P(u < X < v)$.

• L'événement $(X > u)$ est l'événement contraire de l'événement $(X \leq u)$, d'où : $P(X > u) = 1 - P(X \leq u)$.

• $P(u \leq X \leq v) = P(X \leq v) - P(X < u)$.

• Si f est continue sur $[u; v]$, alors $P(u \leq X \leq v) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ où F est une primitive de f. En particulier, $P(X = u) = P(X = v) = 0$.

• On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes : $P(u \leq X \leq v) = P(u < X \leq v) = P(u \leq X < v) = P(u < X < v)$.

• L'événement $(X > u)$ est l'événement contraire de l'événement $(X \leq u)$, d'où : $P(X > u) = 1 - P(X \leq u)$.

• $P(u \leq X \leq v) = P(X \leq v) - P(X < u)$.

Exemple

Supposons qu'on choisisse au hasard un point sur un segment de longueur 3. La probabilité que ce point se trouve dans un intervalle donné de ce segment est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle. Le choix d'un tel point est équivalent au choix d'un nombre quelconque dans l'intervalle $[0; 3]$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}$ si $0 \leq x \leq 3$.

Exemple

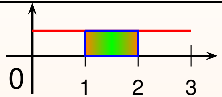
Supposons qu'on choisisse au hasard un point sur un segment de longueur 3. La probabilité que ce point se trouve dans un intervalle donné de ce segment est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle. Le choix d'un tel point est équivalent au choix d'un nombre quelconque dans l'intervalle $[0; 3]$.

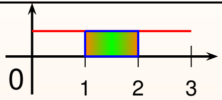
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 3.$

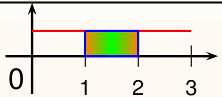
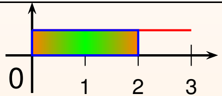
La fonction f est continue, positive, sur $[0; 3]$ et $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 1.$

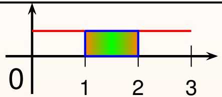
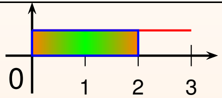
Probabilité	Graphique
$P(1 \leq X \leq 2) =$	

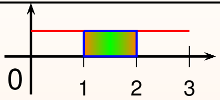
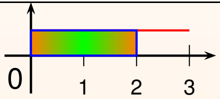
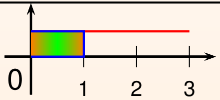
Probabilité	Graphique
$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{3} \mathrm{d}x =$	

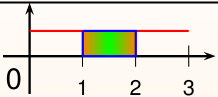
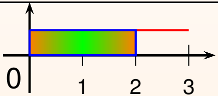
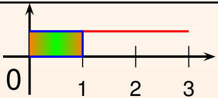
Probabilité	**Graphique**
$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{3} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X \leq 2) =$	

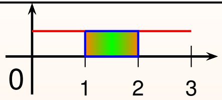
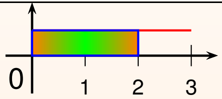
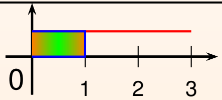
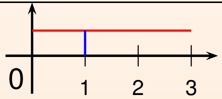
Probabilité	Graphique
$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{3} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{3} \mathrm{d}x =$	

Probabilité	Graphique
$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$	
$P(X < 1) =$	

Probabilité	**Graphique**
$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$	
$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x =$	

Probabilité	Graphique
$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$	
$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X = 1) =$	

Probabilité	Graphique
$P(1 \leq X \leq 2) = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X \leq 2) = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$	
$P(X < 1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X = 1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x =$	

Probabilité	**Graphique**
$P(1 \leq X \leq 2) = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X \leq 2) = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$	
$P(X < 1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$	
$P(X = 1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = 0$	

On dit que la variable aléatoire qui a pour densité de probabilité f, suit la loi uniforme sur $[0; 3]$.

Définition

Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[a; b]$ si sa densité de probabilité f est définie par

. . . .

Définition

Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[a; b]$ si sa densité de probabilité f est définie par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{pour} \quad a \leq x \leq b$$

Définition

Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[a; b]$ si sa densité de probabilité f est définie par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{pour} \quad a \leq x \leq b$$

Propriété

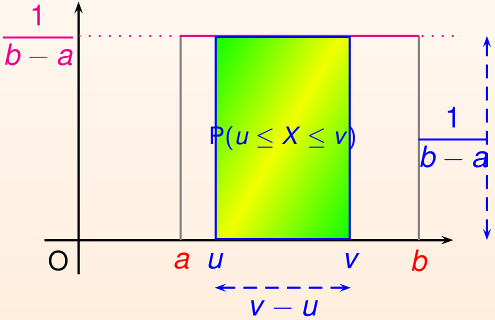
$$P(u \leq X \leq v) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Propriété

$$P(u \leq X \leq v) = \int_u^v \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{v-u}{b-a}$$

Propriété

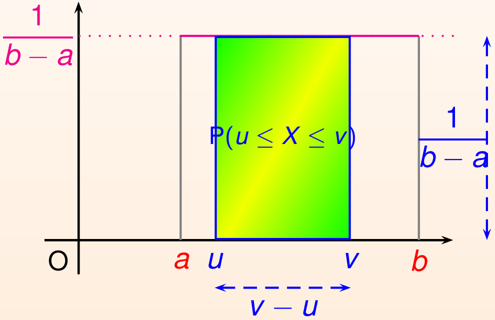
$$P(u \leq X \leq v) = \int_u^v \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{v-u}{b-a}$$



Loi uniforme sur $[a; b]$: probabilité de l'événement $\{u \leq X \leq v\}$

Propriété

$$P(u \leq X \leq v) = \int_u^v \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{v-u}{b-a}$$



Loi uniforme sur $[a; b]$: probabilité de l'événement $\{u \leq X \leq v\}$

Cette probabilité est proportionnelle à la longueur du segment $[u; v]$.

La loi uniforme correspond en probabilités discrètes à un tirage équiprobable dans un ensemble fini.

Espérance

Pour une variable aléatoire discrète l'espérance est la somme des produits $x_i P(X = x_i)$. Pour une variable aléatoire continue à valeur dans $[a; b]$, nous définissons de manière analogue l'espérance par :

. . . .

Espérance

Pour une variable aléatoire discrète l'espérance est la somme des produits $x_i P(X = x_i)$. Pour une variable aléatoire continue à valeur dans $[a; b]$, nous définissons de manière analogue l'espérance par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

Espérance

Pour une variable aléatoire discrète l'espérance est la somme des produits $x_i P(X = x_i)$. Pour une variable aléatoire continue à valeur dans $[a; b]$, nous définissons de manière analogue l'espérance par :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

Les propriétés de l'espérance dans le cadre des variables aléatoires discrètes sont conservées ici.

Dans l'exemple précédent, on a

$$E(X) = \int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots = \ldots$$

Espérance

Pour une variable aléatoire discrète l'espérance est la somme des produits $x_i P(X = x_i)$. Pour une variable aléatoire continue à valeur dans $[a; b]$, nous définissons de manière analogue l'espérance par :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

Les propriétés de l'espérance dans le cadre des variables aléatoires discrètes sont conservées ici.

Dans l'exemple précédent, on a

$$E(X) = \int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{x}{3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

Espérance

Pour une variable aléatoire discrète l'espérance est la somme des produits $x_i P(X = x_i)$. Pour une variable aléatoire continue à valeur dans $[a; b]$, nous définissons de manière analogue l'espérance par :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

Les propriétés de l'espérance dans le cadre des variables aléatoires discrètes sont conservées ici.

Dans l'exemple précédent, on a

$E(X) = \displaystyle\int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{x}{3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Ceci correspond au point milieu de l'intervalle $[0; 3]$.

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \ldots\ldots\ldots$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$

alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$,

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$

alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$,

d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} \mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$

alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$,

d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = G(b) - G(a) =$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$

alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$,

d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} \mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$, d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$, d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$, d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} =$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$, d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \ldots\ldots$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$, d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Dans le cas général d'une loi uniforme, si $g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{b-a}$ alors une primitive G de g est définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2(b-a)}$, d'où :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

On obtient le milieu de $[a; b]$.

Propriété

Si $X \sim \mathcal{U}[\,a\,,b\,]$, l'espérance $E(X)$ est donnée par :

$$E(X) = \ldots\ldots$$

Propriété

Si $X \sim \mathcal{U}[\,a\,,b\,]$, l'espérance $E(X)$ est donnée par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Définition

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité f est définie par :

. . . .

Cette densité est la densité du temps de désintégration d'un atome radioactif et cette loi de probabilité intervient souvent dans les durées de fonctionnement d'un composant électronique.

Définition

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{pour tout} \quad x \geq 0$$

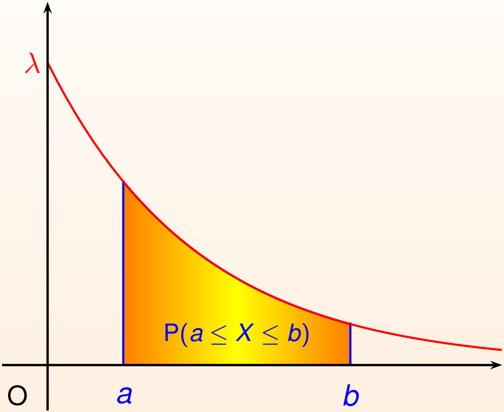
Cette densité est la densité du temps de désintégration d'un atome radioactif et cette loi de probabilité intervient souvent dans les durées de fonctionnement d'un composant électronique.

Définition

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{pour tout} \quad x \geq 0$$

Cette densité est la densité du temps de désintégration d'un atome radioactif et cette loi de probabilité intervient souvent dans les durées de fonctionnement d'un composant électronique.



Densité de la loi exponentielle de paramètre λ avec $P(a \leq X \leq b)$.

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par :
$F(x) = \ldots\ldots\ldots$

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par :
$F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par :
$F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = F(b) - F(0) = -\mathrm{e}^{-\lambda b} - (-\mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = F(b) - F(0) = -\mathrm{e}^{-\lambda b} - (-\mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

Puisque $P(T \leq a) = P(T < a)$, on peut alors déduire :
$P(a \leq T \leq b) =$...
....

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = -e^{-\lambda x}$.
Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = F(b) - F(0) = -e^{-\lambda b} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda b}$$

Puisque $P(T \leq a) = P(T < a)$, on peut alors déduire :
$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda b} - 1 + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = F(b) - F(0) = -\mathrm{e}^{-\lambda b} - (-\mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

Puisque $P(T \leq a) = P(T < a)$, on peut alors déduire :
$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T \leq a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$

et aussi :

$$P(T > a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = -e^{-\lambda x}$.
Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = F(b) - F(0) = -e^{-\lambda b} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda b}$$

Puisque $P(T \leq a) = P(T < a)$, on peut alors déduire :
$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda b} - 1 + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

et aussi :

$$P(T > a) = 1 - P(T \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$$

Calculs

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Si a et b sont deux réels tels que $0 \leq a \leq b$, alors :

$$P(T \leq b) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = F(b) - F(0) = -\mathrm{e}^{-\lambda b} - (-\mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

Puisque $P(T \leq a) = P(T < a)$, on peut alors déduire :
$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T \leq a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$

et aussi :

$$P(T > a) = 1 - P(T \leq a) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

La loi exponentielle est "sans mémoire", T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La loi exponentielle est "sans mémoire", T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(T \geq h)$$

La loi exponentielle est "sans mémoire", T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h)$$

T prend ses valeurs dans $[0; +\infty[$. Nous allons étendre la définition de l'espérance mathématique en posant :

$$E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x f(x) \mathrm{d}x$$

avec ici $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Propriété

Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

T prend ses valeurs dans $[0; +\infty[$. Nous allons étendre la définition de l'espérance mathématique en posant :

$$E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x f(x) \mathrm{d}x$$

avec ici $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Propriété

Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

T prend ses valeurs dans $[0; +\infty[$. Nous allons étendre la définition de l'espérance mathématique en posant :

$$E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x f(x) \mathrm{d}x$$

avec ici $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Propriété

Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = \dots\dots\dots,$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$,

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.

On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient $v(x) = \ldots\ldots\ldots;$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient $v(x) = -e^{-\lambda x}$;

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient
$v(x) = -e^{-\lambda x}$;
$u'(x)v(x) = \ldots\ldots\ldots,$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.

On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.

Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.

Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient

$v(x) = -e^{-\lambda x}$;

$u'(x)v(x) = -e^{-\lambda x}$,

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient $v(x) = -e^{-\lambda x}$;
$u'(x)v(x) = -e^{-\lambda x}$, et une primitive H de $u'v$ est définie par $H(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient $v(x) = -e^{-\lambda x}$;
$u'(x)v(x) = -e^{-\lambda x}$, et une primitive H de $u'v$ est définie par $H(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.

On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.

Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.

Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient

$v(x) = -e^{-\lambda x}$;

$u'(x)v(x) = -e^{-\lambda x}$, et une primitive H de $u'v$ est définie par

$H(x) = \dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.

Finalement, G est définie par $G(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, on obtient
$v(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$;
$u'(x)v(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$, et une primitive H de $u'v$ est définie par $H(x) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Finalement, G est définie par $G(x) = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Démonstration

On cherche une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$.
On connait la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, soit $uv' = (uv)' - u'v$.
Donc une primitive de uv' est la fonction uv à laquelle on retranche une primitive de $u'v$.
Si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, on obtient
$v(x) = -e^{-\lambda x}$;
$u'(x)v(x) = -e^{-\lambda x}$, et une primitive H de $u'v$ est définie par $H(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.
Finalement, G est définie par $G(x) = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0)$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b x f(x) \mathrm{d}x = G(b) - G(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda b} = \ldots;$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$;

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^{X} = \ldots$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda be^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ d'où, par composition :
$\lim\limits_{b\to+\infty} \lambda be^{-\lambda b} = \ldots$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$ d'où, par composition :
$\lim\limits_{b \to +\infty} \lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$.

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$ d'où, par composition :
$\lim\limits_{b \to +\infty} \lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$.
En conclusion

$$E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = \ldots$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda be^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b \to +\infty} e^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$ d'où, par composition :
$\lim\limits_{b \to +\infty} \lambda be^{-\lambda b} = 0$.
En conclusion

$$E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

suite de la démonstration

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(0) = -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} - \mathrm{e}^{-\lambda b} + 1\right)$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$; $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$ d'où, par composition :
$\lim\limits_{b\to+\infty} \lambda b\mathrm{e}^{-\lambda b} = 0$.
En conclusion

$$E(T) = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$