Chapitre 13 : Fonctions trigonométriques

1 Les fonctions sinus et cosinus

1.1 Définitions

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe .... On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe .... On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

1.2 Dérivées

Théorème (admis)

Les fonctions sinus et cosinus sont ....

Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad (\cos x)' = \ldots\ldots$$

Soit a et b deux réels :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration :

....

....

1.3 Propriétés

1.3.1 Périodicité

Propriété

Pour tout réel x : $\sin(x + 2\pi) = \ldots\ldots$ et $\cos(x + 2\pi) = \ldots\ldots$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont ....

Application : il suffit de connaître les valeurs prises par les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π pour déterminer les valeurs de ces fonctions pour tout réel x. En particulier, pour le tracé des courbes représentatives, il suffit de tracer les courbes sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ par exemple puis de compléter par des translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$. ($\vec{i}$ étant le vecteur unitaire en abscisse).

1.3.2 Parité

Propriété

Pour tout réel x : $\sin(-x) = \ldots\ldots$ et $\cos(-x) = \ldots\ldots$

On dit que la fonction sinus est .... et que la fonction cosinus est ....

Conséquence : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Application : pour le tracé des courbes représentatives dans un repère orthogonal, on peut se restreindre à l'intervalle $[0; \pi]$, puis compléter sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ à l'aide des symétries précisées ci-dessus et enfin utiliser les translations.

1.3.3 Limite

Propriété

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \ldots\ldots$$

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\dfrac{\sin(0+x) - \sin 0}{x}$ est le .... de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le .... de la fonction sinus en 0 qui est ......

Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(0+x) - \sin 0}{x} = 1.$

1.4 Variations et représentations graphiques

Grâce aux propriétés de périodicité et de parité, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.

Le signe des fonctions dérivées s'obtient avec le cercle trigonométrique.

Fonction cosinus

x	0 $\qquad\qquad$ π
$f'(x) = -\sin x$	
$f(x) = \cos x$	

Fonction sinus

x	0 $\qquad$ $\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ π
$f'(x) = \cos(x)$	
$f(x) = \sin(x)$	

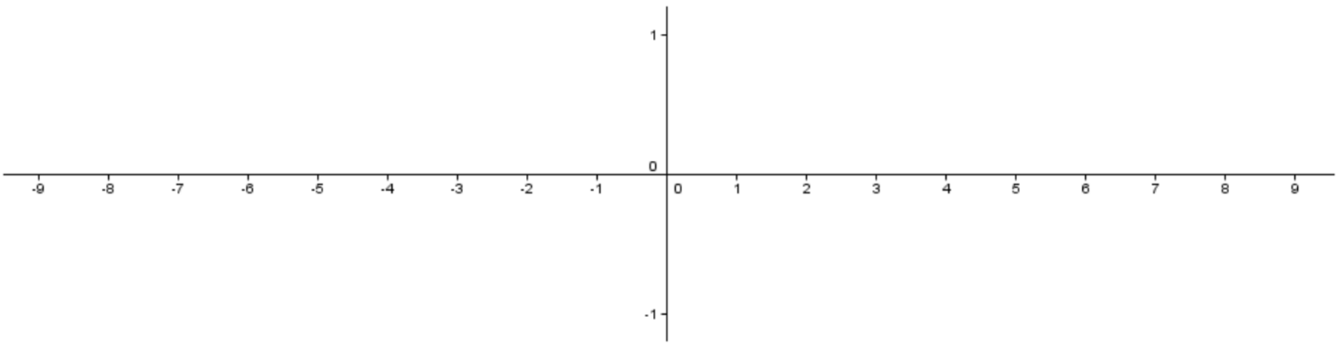

FIGURE 1 – *Courbe représentative de la fonction cosinus*

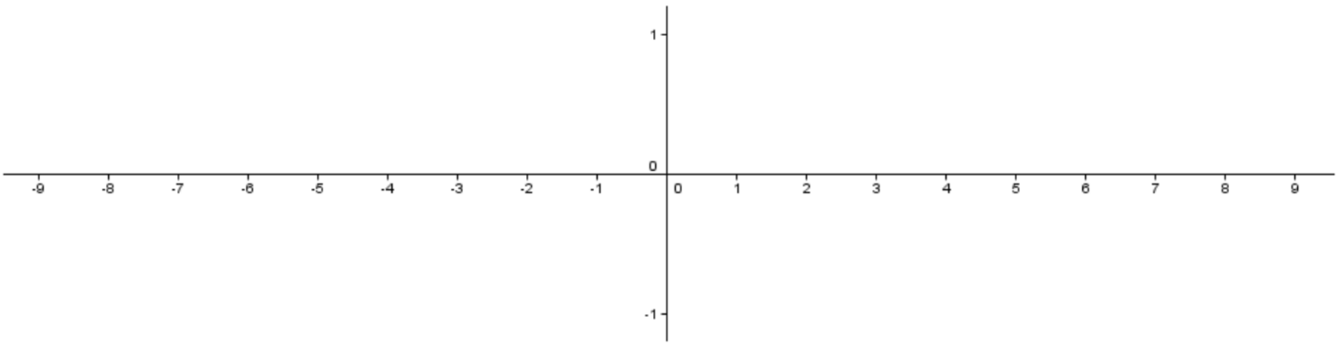

FIGURE 2 – *Courbe représentative de la fonction sinus*