Cours de terminale S
Lois normales

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2018-2019

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0; 1[$, on a :

. . . .

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0; 1[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$$

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0;1[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$$

où I_n désigne l'intervalle ....

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0; 1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0; 1[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

u_α a été défini dans le chapitre sur les lois à densités par l'égalité ....

....

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

u_α a été défini dans le chapitre sur les lois à densités par l'égalité $P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1-\alpha$, où Y suit la loi normale centrée réduite.

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Propriété

Pour tout α dans $]0; 1[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

u_α a été défini dans le chapitre sur les lois à densités par l'égalité $P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$, où Y suit la loi normale centrée réduite.

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$\dfrac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$$

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$\dfrac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

puis, en retranchant np :

$\dfrac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

puis, en retranchant np :

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

puis, en retranchant np :

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

enfin, en divisant par $\sqrt{np(1-p)}$, $(\neq 0)$:

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow$ ....

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$\dfrac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

puis, en retranchant np :

$\dfrac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

enfin, en divisant par $\sqrt{np(1-p)}$, $(\neq 0)$:

$\dfrac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha \leq \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha$

Démonstration

$$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

En multipliant par n, on obtient :

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

puis, en retranchant np :

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$

enfin, en divisant par $\sqrt{np(1-p)}$, $(\neq 0)$:

$\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha$

suite de la démonstration

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;
le théorème de Moivre-Laplace, (chapitre lois à densités), nous dit que, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [a; b]\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

suite de la démonstration

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;
le théorème de Moivre-Laplace, (chapitre lois à densités), nous dit que, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [a; b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P(a \leq Y \leq b)$$

suite de la démonstration

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;
le théorème de Moivre-Laplace, (chapitre lois à densités), nous dit que, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Z_n \in [a;b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P(a \leq Y \leq b)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.

suite de la démonstration

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;

le théorème de Moivre-Laplace, (chapitre lois à densités), nous dit que, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Z_n \in [a;b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = P(a \leq Y \leq b)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) =$. . . . .

. . . .

suite de la démonstration

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;
le théorème de Moivre-Laplace, (chapitre lois à densités), nous dit que, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [a;b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P(a \leq Y \leq b)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha)$
$= P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$

suite de la démonstration

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;
le théorème de Moivre-Laplace, (chapitre lois à densités), nous dit que, pour tous réels a et b,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Z_n \in [a;b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = P(a \leq Y \leq b)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha)$
$= P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$

On définit la variable aléatoire F_n par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, $(n > 0)$; F_n représente la fréquence de succès.

On définit la variable aléatoire F_n par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, $(n > 0)$; F_n représente la fréquence de succès.

Définition

L'intervalle ....

....

....

....

On définit la variable aléatoire F_n par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, $(n > 0)$; F_n représente la fréquence de succès.

Définition

L'intervalle $\left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil $1 - \alpha$. Cet intervalle, déterminé à partir de p et de n, contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1 - \alpha$ que n est grand.

On définit la variable aléatoire F_n par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, $(n > 0)$; F_n représente la fréquence de succès.

Définition

L'intervalle $\left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil $1 - \alpha$. Cet intervalle, déterminé à partir de p et de n, contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1 - \alpha$ que n est grand.

Au seuil de 95%, $\alpha = 0,05$ et $u_\alpha \simeq 1,96$. (Chapitre sur les lois à densités).

Au seuil de 95%, $\alpha = 0,05$ et $u_\alpha \simeq 1,96$. (Chapitre sur les lois à densités).
On obtient alors la propriété d'approximation suivante qui est valable dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$:

Propriété

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de F_n, la fréquence d'un caractère dans un échantillon de taille n, est

....

....

Au seuil de 95%, $\alpha = 0,05$ et $u_\alpha \simeq 1,96$. (Chapitre sur les lois à densités).
On obtient alors la propriété d'approximation suivante qui est valable dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$:

Propriété

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de F_n, la fréquence d'un caractère dans un échantillon de taille n, est $\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion de ce caractère dans la population.

Au seuil de 95%, $\alpha = 0,05$ et $u_\alpha \simeq 1,96$. (Chapitre sur les lois à densités).
On obtient alors la propriété d'approximation suivante qui est valable dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$:

Propriété

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de F_n, la fréquence d'un caractère dans un échantillon de taille n, est $\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion de ce caractère dans la population.

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq \ldots\ldots$

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq \ldots$

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$

et $1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \ldots\ldots$

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$
et $1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$ et $1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On obtient alors

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset$$

....

....

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$ et $1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On obtient alors

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset$$

$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ qui

est l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde.

Remarque

Si $p \in]0;1[$, alors $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$, donc $\sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$ et $1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On obtient alors

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$ qui

est l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde.

L'intervalle de fluctuation asymptotique défini plus haut est utilisé, (lorsque les conditions de validité sont vérifiées, soit $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$), dans l'élaboration d'un test permettant de vérifier une hypothèse.
On considère une population dans laquelle on émet l'hypothèse H que la proportion d'un caractère est p.
On appelle I l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de ce caractère dans un échantillon aléatoire de taille n, au seuil de 95%, sous l'hypothèse H.

On observe alors la fréquence f du caractère dans un échantillon de taille n.

La règle de décision est :

- ....

On observe alors la fréquence f du caractère dans un échantillon de taille n.

La règle de décision est :

- si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse H.

On observe alors la fréquence f du caractère dans un échantillon de taille n.

La règle de décision est :

- si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse H.
- ....

On observe alors la fréquence f du caractère dans un échantillon de taille n.

La règle de décision est :

- si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse H.
- si $f \notin I$, alors on rejette l'hypothèse H.

On observe alors la fréquence f du caractère dans un échantillon de taille n.

La règle de décision est :

- si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse H.
- si $f \notin I$, alors on rejette l'hypothèse H.

Remarques

- Au seuil de 95%, la probabilité que f, (obtenue dans un échantillon aléatoire), ne soit pas dans I est $\alpha = 0,05$. Cela signifie qu'il y a un risque de 5% de se tromper en rejetant l'hypothèse H alors qu'elle est vraie.

- Il est possible d'utiliser d'autres seuils, le plus courant après 95%, étant 99% ; il faut alors remplacer, dans l'intervalle de fluctuation, le nombre $u_{0,05} \simeq 1,96$ par le nombre $u_{0,01} \simeq 2,58$.

Exemple

Un joueur qui doit choisir au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes obtient certains avantages s'il découvre un roi. On constate qu'il a retourné 22 fois un roi sur 100 essais. Peut-on présumer, au risque de 5%, que ce joueur est un tricheur ?

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p =$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52}$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

La taille de l'échantillon $n = 100$ et la fréquence d'apparition du roi dans cet échantillon est $f =$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
La taille de l'échantillon $n = 100$ et la fréquence d'apparition du roi dans cet échantillon est $f = \dfrac{22}{100}$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
La taille de l'échantillon $n = 100$ et la fréquence d'apparition du roi dans cet échantillon est $f = \dfrac{22}{100} = 0.22$.

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
La taille de l'échantillon $n = 100$ et la fréquence d'apparition du roi dans cet échantillon est $f = \dfrac{22}{100} = 0.22$.
On a $n = 100$, $np \approx 7.69$, $n(1-p) \approx 92.308$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
La taille de l'échantillon $n = 100$ et la fréquence d'apparition du roi dans cet échantillon est $f = \dfrac{22}{100} = 0.22$.
On a $n = 100$, $np \approx 7.69$, $n(1-p) \approx 92.308$ Donc les conditions d'approximation sont vérifiées.

$$I =$$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
La taille de l'échantillon $n = 100$ et la fréquence d'apparition du roi dans cet échantillon est $f = \dfrac{22}{100} = 0.22$.
On a $n = 100$, $np \approx 7.69$, $n(1-p) \approx 92.308$ Donc les conditions d'approximation sont vérifiées.

$$I = \left[\frac{1}{13} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{13}\frac{12}{13}}{100}}; \frac{1}{13} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{13}\frac{12}{13}}{100}}\right]$$

$$I \approx$$

La proportion théorique (d'obtenir un roi) est $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
La taille de l'échantillon $n = 100$ et la fréquence d'apparition du roi dans cet échantillon est $f = \dfrac{22}{100} = 0.22$.
On a $n = 100$, $np \approx 7.69$, $n(1 - p) \approx 92.308$ Donc les conditions d'approximation sont vérifiées.

$$I = \left[\frac{1}{13} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{13}\frac{12}{13}}{100}}; \frac{1}{13} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{13}\frac{12}{13}}{100}}\right]$$

$$I \approx [0.025; 0.129]$$

$$I \approx [0.025; 0.129]$$

$$I \approx [0.025; 0.129]$$

On peut donc affirmer au seuil de 95% que la fréquence de roi qu'on obtient lors de 100 tirages est compris entre 0.02 et 0.13.

$$I \approx [0.025; 0.129]$$

On peut donc affirmer au seuil de 95% que la fréquence de roi qu'on obtient lors de 100 tirages est compris entre 0.02 et 0.13.

Or $f = 0.22 \notin [0.02; 0.13]$.

$$I \approx [0.025; 0.129]$$

On peut donc affirmer au seuil de 95% que la fréquence de roi qu'on obtient lors de 100 tirages est compris entre 0.02 et 0.13.

Or $f = 0.22 \notin [0.02; 0.13]$.

On peut donc présumer avec un risque 5% que le joueur est un tricheur.

On se propose ici d'estimer une proportion dans une population à partir de la fréquence observée sur un échantillon. C'est ce que l'on pratique par exemple lors d'un sondage.

Propriété

On suppose que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour tout réel $p \in]0; 1[$, ...

....

Propriété

On suppose que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour tout réel $p \in]0; 1[$, il existe un entier n_0 tel que : si $n \geq n_0$, alors $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$.

Propriété

On suppose que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour tout réel $p \in]0; 1[$, il existe un entier n_0 tel que : si $n \geq n_0$, alors $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$.

Démonstration

On reprend les notations de la démonstration page 1 ;

si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, d'après le théorème de Moivre-Laplace,

on peut écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [-2;2]\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

On reprend les notations de la démonstration page 1 ;

si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, d'après le théorème de Moivre-Laplace, on peut écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [-2;2]\right) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(-2 \leq Y \leq 2)$$

Démonstration

On reprend les notations de la démonstration page 1 ;
si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, d'après le théorème de Moivre-Laplace,
on peut écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [-2;2]\right) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P(-2 \leq Y \leq 2)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.

Or : $P(-2 \leq Y \leq 2) \simeq 0,954$
On obtient donc

. . . .

Démonstration

On reprend les notations de la démonstration page 1 ;
si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, d'après le théorème de Moivre-Laplace, on peut écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [-2;2]\right) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P(-2 \leq Y \leq 2)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.

Or : $P(-2 \leq Y \leq 2) \simeq 0,954$
On obtient donc

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,954$$

Démonstration

On reprend les notations de la démonstration page 1 ;
si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, d'après le théorème de Moivre-Laplace,
on peut écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(Z_n \in [-2;2]\right) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P(-2 \leq Y \leq 2)$$

où Y suit la loi normale centrée réduite.

Or : $P(-2 \leq Y \leq 2) \simeq 0,954$
On obtient donc

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0,954$$

suite de la démonstration

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

suite de la démonstration

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

suite de la démonstration

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

D'après la remarque page 2, puisque $2\sqrt{p(1-p)} \leq 1$, on a l'inclusion

. . . .

suite de la démonstration

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

D'après la remarque page 2, puisque $2\sqrt{p(1-p)} \leq 1$, on a l'inclusion

$$\left[p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

suite de la démonstration

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

D'après la remarque page 2, puisque $2\sqrt{p(1-p)} \leq 1$, on a l'inclusion

$$\left[p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

En conclusion, on obtient donc :

....

suite de la démonstration

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

D'après la remarque page 2, puisque $2\sqrt{p(1-p)} \leq 1$, on a l'inclusion

$$\left[p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

En conclusion, on obtient donc :

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

suite de la démonstration

D'après le cours sur les limites d'une suite, on peut déduire qu'il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

D'après la remarque page 2, puisque $2\sqrt{p(1-p)} \leq 1$, on a l'inclusion

$$\left[p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

En conclusion, on obtient donc :

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$$

Propriété

Soit F_n la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion d'un caractère est p, associe la fréquence obtenue. Alors l'intervalle

....

....

Propriété

Soit F_n la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion d'un caractère est p, associe la fréquence obtenue. Alors l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilté égale au moins à $0,95$.

Propriété

Soit F_n la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion d'un caractère est p, associe la fréquence obtenue. Alors l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilté égale au moins à $0,95$.

Démonstration

Puisque $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, il suffit d'appliquer le résultat précédent en remarquant que :

. . . .

Démonstration

Puisque $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, il suffit d'appliquer le résultat précédent en remarquant que :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Longleftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Démonstration

Puisque $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, il suffit d'appliquer le résultat précédent en remarquant que :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Longleftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Définition

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p. Alors l'intervalle ....

....

....

Définition

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p. Alors l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance $0,95$.

Définition

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n, extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p. Alors l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance $0,95$.

Cet intervalle est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure à $0,95$.