Cours de terminale S
Récurrence

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2019-2020

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: ....

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$
- Pour $n = 3$: ....

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$
- Pour $n = 3$: $1 + 2 + 3 = 6$ et $\dfrac{3(3+1)}{2} = 6$

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

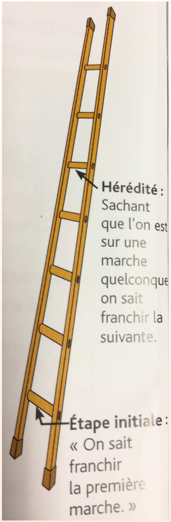
Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

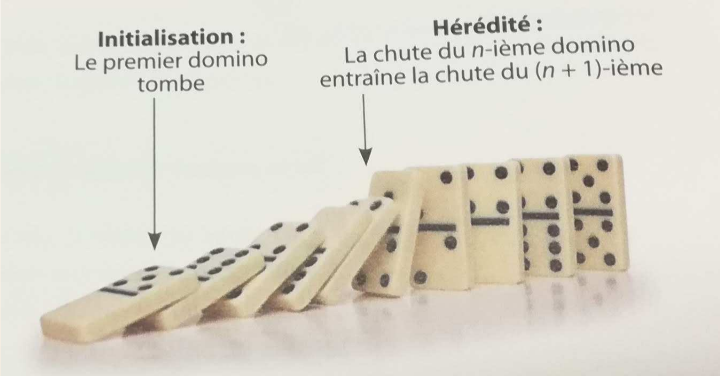
Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.
Idée : le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré).

Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.




Initialisation :
Le premier domino
tombe
Hérédité :
La chute du n-ième domino
entraîne la chute du (n + 1)-ième

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
  C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier n ou pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Montrons que $\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
On note cette proposition P_n (pour $n \in \mathbb{N}$).

Exemple

Montrons que $\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On note cette proposition P_n (pour $n \in \mathbb{N}$).

- Initialisation : ....
  ....
  ....

Exemple

Montrons que $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On note cette proposition P_n (pour $n \in \mathbb{N}$).

- Initialisation : Montrons que P_n est vraie au rang 1, c'est-à-dire que P_1 est vraie :
  $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$; c'est vérifié.

- Hérédité : ....

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que : $1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
$1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or

$1+2+\ldots+k+(k+1)=$

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que : $1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or
  $1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
$1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or
$1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
$(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=$

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or
  $1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
  $(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
$1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or
$1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
$(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Donc P_{k+1} est vraie

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or
  $1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
  $(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Donc P_{k+1} est vraie

- Conclusion : La propriété P_n est vraie pour tout $n\geq 1$,

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
  Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
  $1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or
  $1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
  $(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Donc P_{k+1} est vraie

- Conclusion : La propriété P_n est vraie pour tout $n\geq 1$,

- Hérédité : Supposons que, pour un certain rang k, P_k est vraie, c'est-à-dire que :$1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
Montrons alors que P_{k+1} est vraie : c'est-à-dire que :
$1+2+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or
$1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$
$(k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Donc P_{k+1} est vraie

- Conclusion : La propriété P_n est vraie pour tout $n\geq 1$, c'est-à-dire : $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.