

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Introduction

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n . Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2, n = 3$, etc :

pour $n = 2$:

pour $n = 3$:

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n .

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Idée : Le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré). Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.

1.2 Principe de récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

1.3 Exemple

Montrons que $\sum_{q=1}^n q = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation :

Hérité :

.....

Conclusion :