

Produit scalaire dans l'espace

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2019-2020

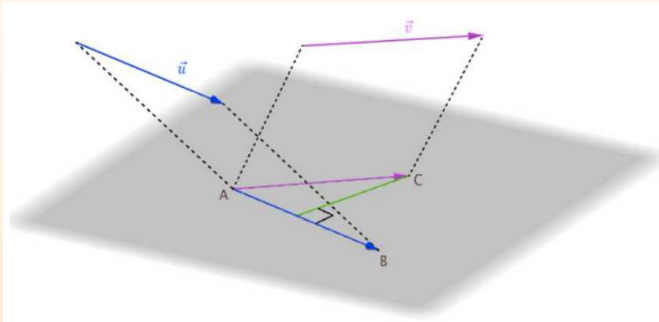
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A , B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe au moins un plan P contenant les points A , B et C .

Définition

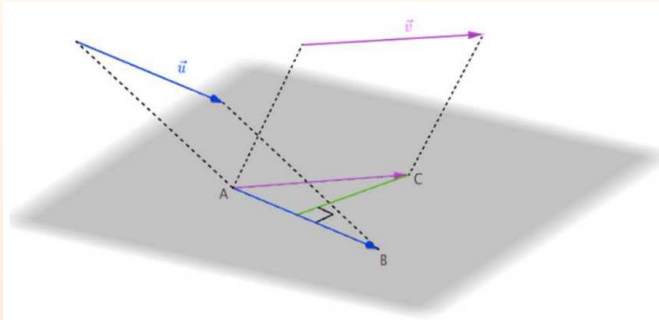
On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté

.....



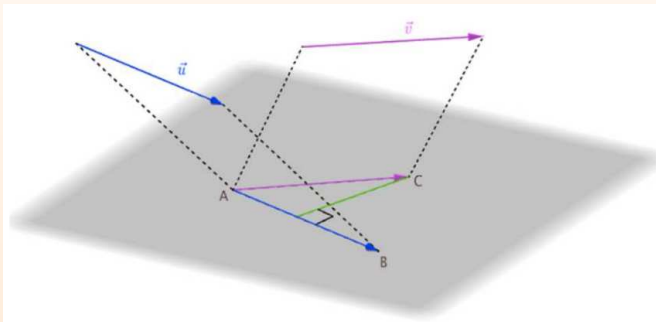
Définition

On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan P .



Définition

On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan P .



On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

.....

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)\end{aligned}$$

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)\end{aligned}$$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)\end{aligned}$$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On a ainsi, (rappels de première) :

- $$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)\end{aligned}$$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition (Définition avec l'angle :)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$$

Définition (Définition avec l'angle :)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

Définition (Définition avec l'angle :)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = || \vec{u} || \times || \vec{v} || \times \cos(\widehat{BAC})$$

Définition

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$$

Définition

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ donc :}$$

Définition

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$$

Définition

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens,}$$

Définition

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens,}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$$

Définition

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens,}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens différents.}$$

Définition

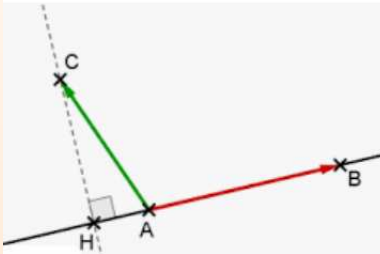
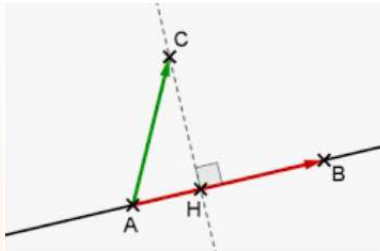
Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens,}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens différents.}$$



Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} =$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = || \vec{u} ||^2 = \vec{u}^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = || \vec{u} ||^2 = \vec{u}^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = || \vec{u} ||^2 = \vec{u}^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(k \vec{u}) \cdot \vec{v} =$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = || \vec{u} ||^2 = \vec{u}^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k \vec{v})$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 =$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 =$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
Alors :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

Remarque

Le vecteur nul est

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque

Le vecteur nul est

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

.....

Remarque

Le vecteur nul est

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

Le vecteur nul est

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

Le vecteur nul est

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

Le vecteur nul est **orthogonal à tous les vecteurs**.

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est

.....

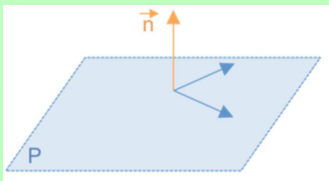
.....

Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P .

Définition

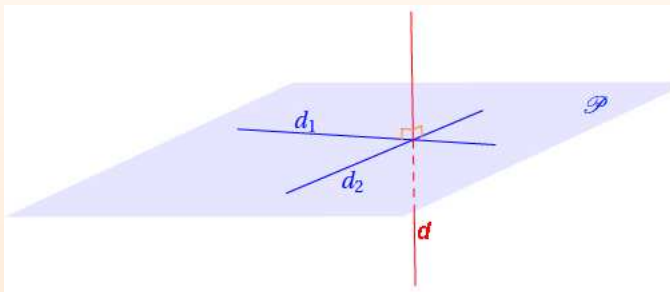
Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P .



Théorème

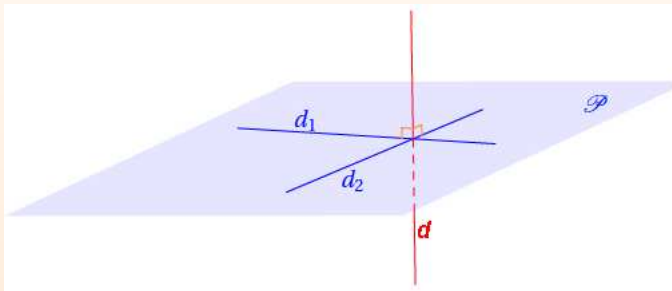
Une droite d est orthogonale à toute
droite d'un plan P si et seulement si

.....
.....



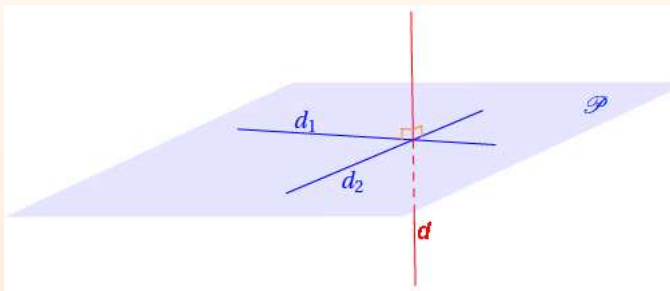
Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.



Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.



Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P ,

.....

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P ,

.....

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P ,

.....

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P , elle est en particulier orthogonale aux droites d_1 et d_2 contenues dans P .

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors

.....

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc

.....
.....

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P . Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$.

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P . Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$.

On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \dots\dots\dots$

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P . Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$.

On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2) = x \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P . Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$.

On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2) = x \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$

.....

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P . Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$.

On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2) = x \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, et donc la droite d est orthogonale à la droite Δ .

$\Leftrightarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

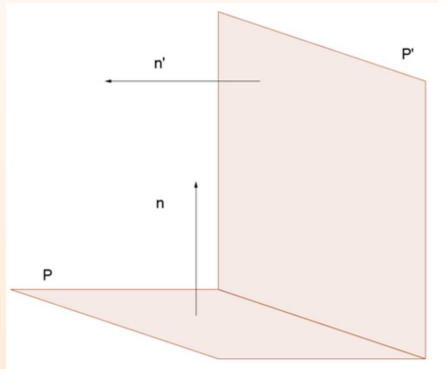
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P . Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$.

On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2) = x \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, et donc la droite d est orthogonale à la droite Δ .

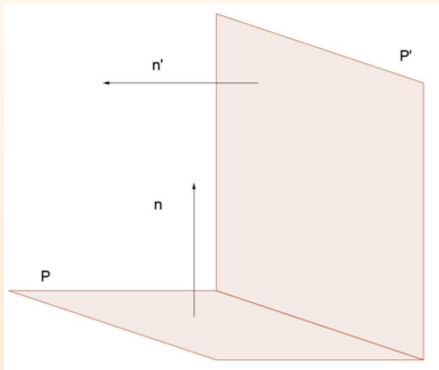
Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que



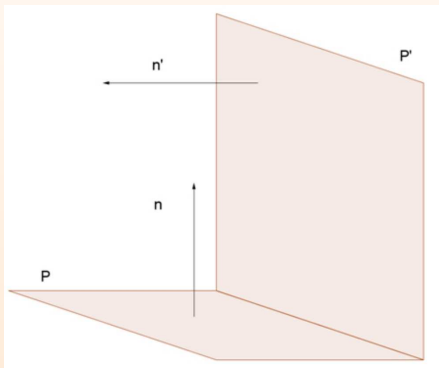
Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.



Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.



Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme

.....

.....

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a , b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

.....

.....

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a , b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a , b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$.

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \end{aligned}$$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Preuve (exigible)

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = -ax_A - by_A - cz_A.$$

Preuve (exigible)

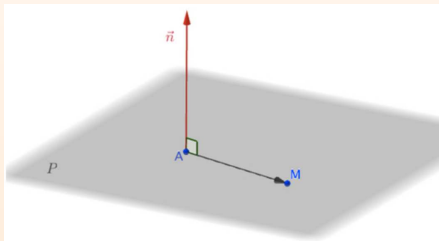
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d = -ax_A - by_A - cz_A.$$



Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point

.....

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n} (a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = \dots\dots\dots$

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
 E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

.....

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
 E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
 E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Donc l'ensemble E est

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
 E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur
normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a , b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation
 $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$.
 E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
 $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur
normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation $2x + 2y + 6z + 4 = 0$.

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation $2x + 2y + 6z + 4 = 0$.

Propriété

Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

caractérise

.....

Propriété

Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

caractérise une droite et il est appelé système d'équations cartésiennes de cette droite.

Propriété

Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

caractérise une droite et il est appelé système d'équations cartésiennes de cette droite.

Preuve

Si les vecteurs $\vec{n} (a; b; c)$ et $\vec{n}' (a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont

.....

Preuve

Si les vecteurs $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont **sécants selon une seule droite**.

Preuve

Si les vecteurs $\vec{n} (a; b; c)$ et $\vec{n}' (a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants selon une seule droite.