Chapitre 23 : Produit scalaire dans l'espace

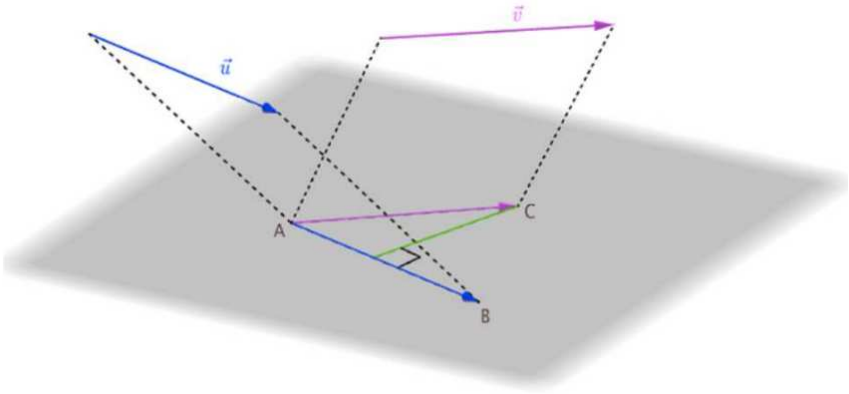
1 Produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Définitions

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan P contenant les points A. B et C.

Définition :

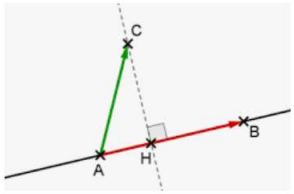
On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté .....
.....



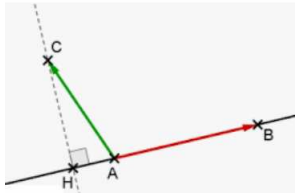
On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ .....
- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors .....

Définition avec l'angle :
$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ .....



Définition avec le projeté orthogonal :
Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ .....
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ .....
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ .....



1.2 Propriétés

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$\vec{u} \cdot \vec{u} =$ .....
$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ .....
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$ .....
$(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} =$ .....
$(\vec{u} + \vec{v})^2 =$ .....
$(\vec{u} - \vec{v})^2 =$ .....
$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$ .....

1.3 Orthogonalité

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si .....
- Si $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ .....

Remarque
Le vecteur nul est .....

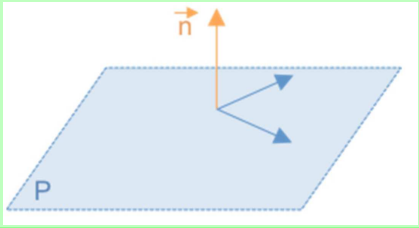
2 Equations cartésiennes de l'espace

2.1 Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est

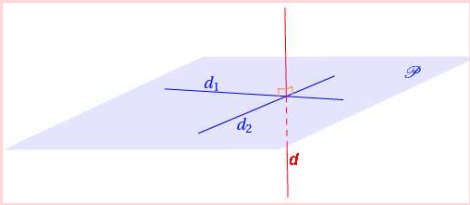
.....



Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si .....

.....



Preuve (exigible)

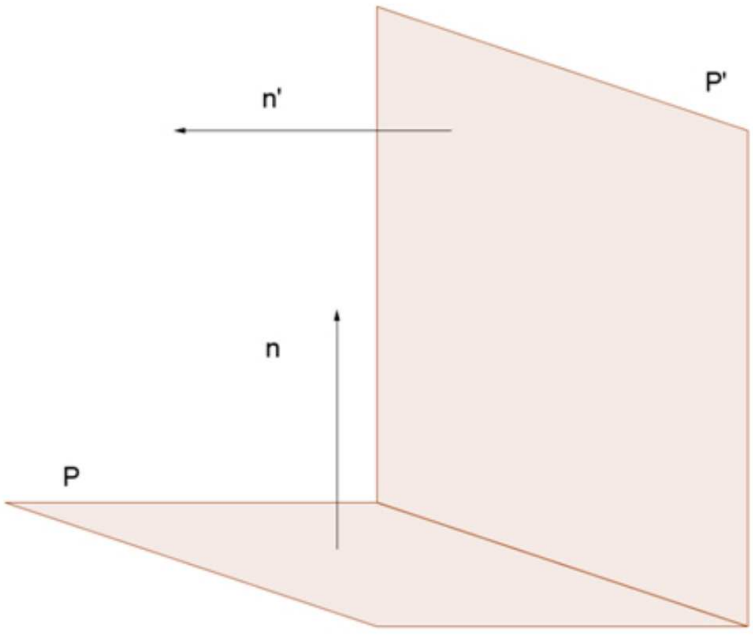
$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P, ...
.....

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors .....
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, ...
.....
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} =$ .....

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ .....

Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.
Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que .....



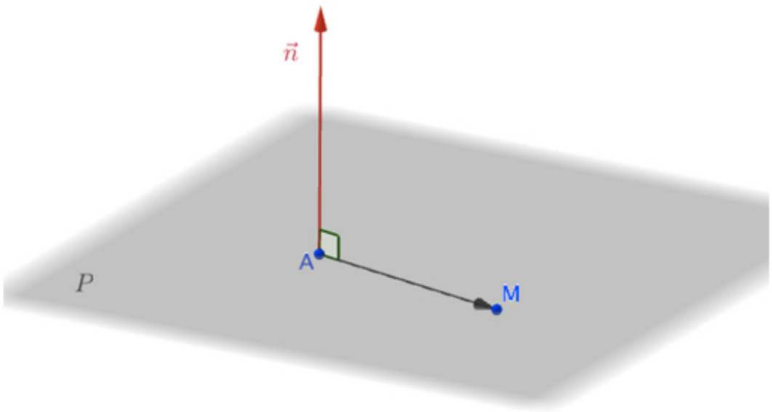
2.2 Equations cartésiennes d'un plan

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\ (a;b;c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme
.....

Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que
.....

Preuve (exigible)
Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de P.
$M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow$ .....$\Leftrightarrow$.....
$\Leftrightarrow$ .....
$\Leftrightarrow$ .....
$\Leftrightarrow$ .....



Réciproquement :
Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$.
Alors le point .....
.....

Soit un vecteur $\vec{n}\ (a;b;c)$. Pour tout point $M(x;y;z)$, on a :
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=$ .....
E est donc l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que .....
Donc l'ensemble E est .....

Remarque
L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.
Par exemple, le plan d'équation $x+y+3z+2=0$ a aussi pour équation .....

2.3 Equations cartésiennes d'une droite

Propriété

Si les triplets $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}$$

caractérise .....

Preuve

Si les vecteurs $\vec{n}\ (a;b;c)$ et $\vec{n'}\ (a';b';c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont .....