

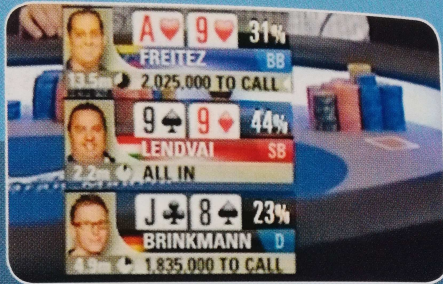
Cours de terminale S

Probabilités : Conditionnement et indépendance

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2019-2020



Les ordinateurs permettent
de calculer en direct les probabilités
que les joueurs de poker
ont de gagner.

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit P une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement B , on appelle probabilité de B sachant A le réel, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \dots\dots\dots$$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit P une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement B , on appelle probabilité de B sachant A le réel, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) =$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} =$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

$$\bullet P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} =$$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) =$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} =$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} =$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$

Propriété

P_A est une probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur Ω .

En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
- Pour tout événements B et C incompatibles, ($B \cap C = \emptyset$), on a : $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

Propriété

Propriété

- $P_A(A) = \dots\dots\dots$

Propriété

- $P_A(A) = 1$

Propriété

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors

Propriété

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$

Propriété

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$
- $P_A(\overline{B}) = \dots\dots\dots$

Propriété

- $P_A(A) = 1$
- si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Démonstration

Démonstration

- $P_A(A) = \dots\dots\dots$

Démonstration

- $$P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Démonstration

- $P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \dots\dots\dots$

Démonstration

- $P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

Démonstration

$$\bullet P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$\bullet P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$

Démonstration

- $P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$

- $P_A(\bar{B}) = \dots\dots\dots$

Démonstration

- $P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$

- $P_A(\bar{B}) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$

Démonstration

- $P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$
car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$
- $P_A(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$
car $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Démonstration

- $P_A(A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

car si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$

- $P_A(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)}$

car $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

donc $P_A(\overline{B}) = 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - P_A(B)$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc}$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

de même :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et par suite :}$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

de même :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et par suite : } P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

de même :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et par suite : } P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = \dots\dots\dots$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

de même :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et par suite : } P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

de même :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et par suite : } P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

remarque : si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = \dots$

Soit A et B des événements de probabilité non nulle, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

de même :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et par suite : } P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

On en déduit que :

Propriété

pour tous événements A et B de probabilité non nulle,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

remarque : si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = 0$.

Représentation par un arbre pondéré

Exemple : tous les élèves de Terminale d'un lycée ont passé un test de certification en Anglais. 80% ont réussi le test.
Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé.
Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les évènements T : « L'élève a réussi le test » et
 D : « L'élève a déjà redoublé ».

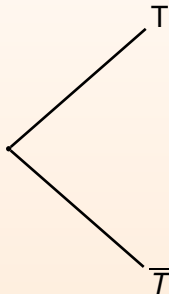
On peut représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré, en respectant certaines règles.

Représentation par un arbre pondéré

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

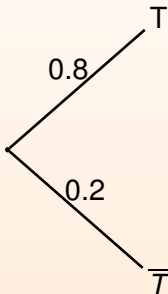
Représentation par un arbre pondéré

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.



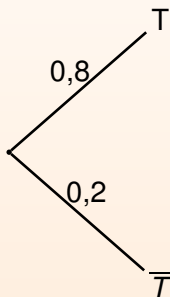
Représentation par un arbre pondéré

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.

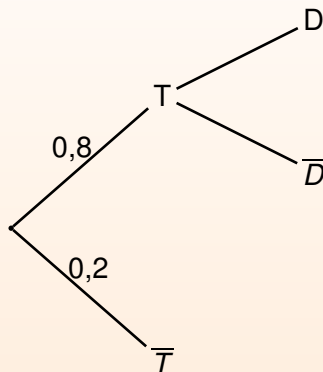


Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

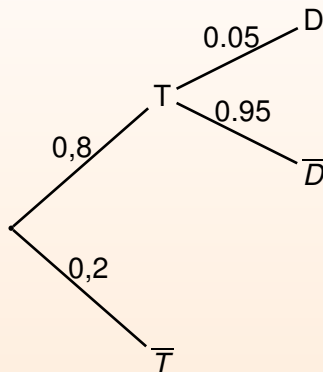
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



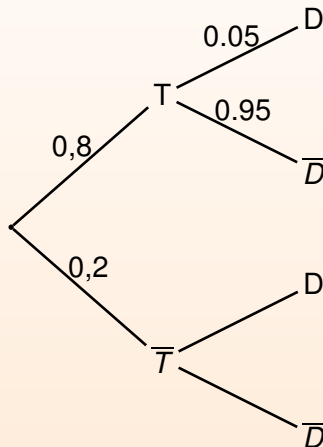
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



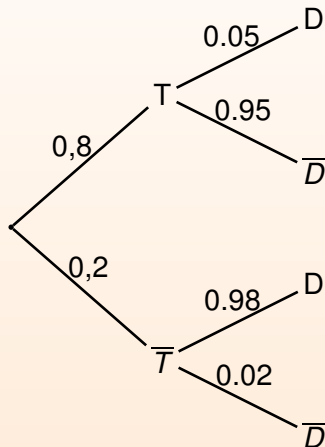
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.



Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à ...

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de

.....

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = \dots\dots\dots$

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,95$

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.

Par exemple, ici :
 $P(D) = \dots\dots\dots$

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, ici : $P(T \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,95$

Règle 5 : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.

Par exemple, ici :

$$P(D) = P(D \cap T) + P(D \cap \overline{T}) = 0,05 \times 0,8 + 0,98 \times 0,2 = 0,236$$

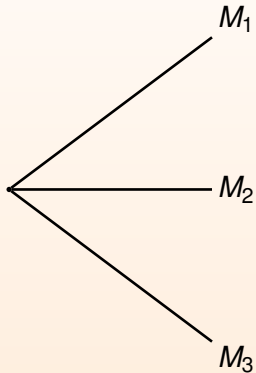
Exemple

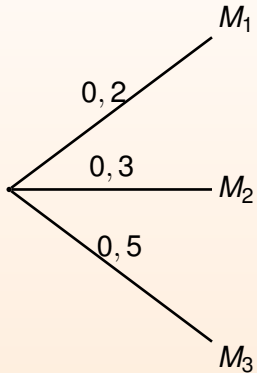
Trois machines M_1 , M_2 , et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production d'une entreprise. On estime à 1, 5%, 2% et 1% les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1 , M_2 et M_3 . On choisit une pièce au hasard dans la production.

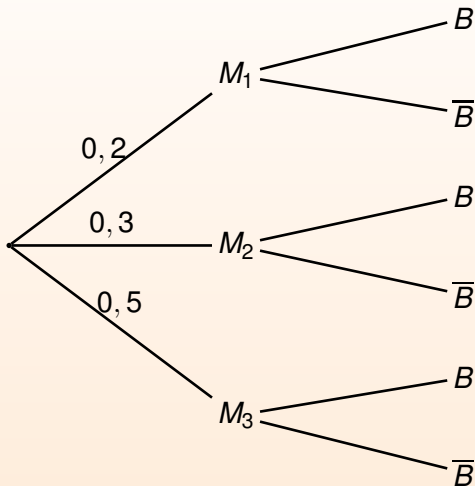
L'objectif est de calculer la probabilité de l'évènement B : « La pièce est bonne ».

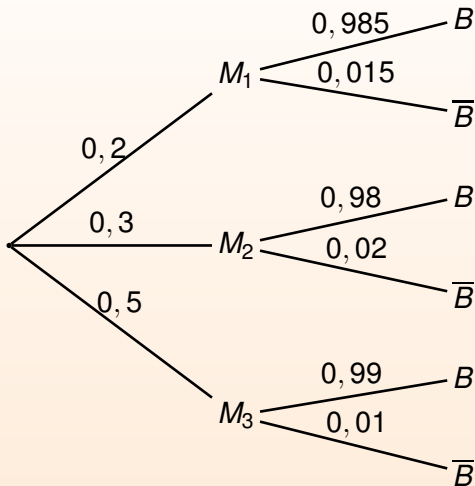
Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'évènement : « La pièce est produite par M_i ».

On peut illustrer la situation par un arbre pondéré :









On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins
menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins
.....

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :

$$P(B) = \dots\dots\dots$$

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :

$$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$$

On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1-B$, $-M_2-B$, $-M_3-B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :

$$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$$

On peut détailler les calculs dans le tableau suivant :

	B	$\overline{B}$	
M_1			

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2			

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3			

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3	$0,5 \times 0,99$	$0,5 \times 0,01$	$P(M_3) = 0,5$

	B	$\overline{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1) = 0,2$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2) = 0,3$
M_3	$0,5 \times 0,99$	$0,5 \times 0,01$	$P(M_3) = 0,5$
	$P(B) = 0,986$	$P(\overline{B}) = 0,014$	1

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω , deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω , deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Propriété (Formule des probabilités totales)

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = \dots\dots\dots$$

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω , deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Propriété (Formule des probabilités totales)

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω , deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Propriété (Formule des probabilités totales)

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

=

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω , deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω on dit qu'ils constituent une partition de Ω

Propriété (Formule des probabilités totales)

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ constituent une partition de Ω et B est un événement quelconque, alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{aligned}$$

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles.

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
 $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Alors $P(A) = \dots\dots\dots$

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Alors $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$,

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Alors $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Alors $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc A est indépendant de B .

Événements indépendants

On suppose que A et B sont des événements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles. Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A , ce qui signifie que : $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, il en résulte que
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Alors $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, donc A est indépendant de B .

D'où la définition :

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = \dots\dots\dots$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = \dots$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = \dots$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Noter que si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \dots$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Noter que si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = \dots$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

" A et B indépendants" signifie

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

" A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

" A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \dots\dots$

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

" A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

" A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Si A et B sont incompatibles alors ils ne sont pas indépendants et s'ils sont indépendants alors ils

Remarque

pour des événements A et B de probabilité non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

" A et B incompatibles" signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

" A et B indépendants" signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Si A et B sont incompatibles alors ils ne sont pas indépendants et s'ils sont indépendants alors ils **ne sont pas incompatibles**.

Exemple :

on lance un dé à 6 faces équilibré. On considère les évènements suivants :

A : « le résultat est pair »

B : « le résultat est 2 »

C : « le résultat est supérieur ou égal à 5 »

Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C ? Les évènements B et C ?

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

Autre méthode : $P_A(C) = \frac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

Autre méthode : $P_A(C) = \frac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

B et C sont incompatibles donc ne sont pas indépendants.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{12}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

Autre méthode : $P_A(C) = \frac{1}{3}$ donc $P_A(C) = P(C)$ d'où A et C sont indépendants.

B et C sont incompatibles donc ne sont pas indépendants.

$$\left(P(B \cap C) = 0 \text{ et } P(B) \times P(C) = \frac{1}{18} \right)$$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

d'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$\text{d'où } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) \end{aligned}$$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Donc $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Donc $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Corollaire

Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour :

Démonstration

Corollaire

Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour :

🕒 A et $\overline{B}$

Démonstration

Corollaire

Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour :

- 1 A et $\overline{B}$
- 2 $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Démonstration

Corollaire

Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour :

- 1 A et $\overline{B}$
- 2 $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Démonstration

- 1 La démonstration est analogue : il suffit d'échanger les rôles de A et B .

Corollaire

Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour :

- 1 A et $\overline{B}$
- 2 $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Démonstration

- 1 La démonstration est analogue : il suffit d'échanger les rôles de A et B .
- 2 D'après la propriété précédente, $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Corollaire

Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même pour :

- 1 A et $\bar{B}$
- 2 $\bar{A}$ et $\bar{B}$

Démonstration

- 1 La démonstration est analogue : il suffit d'échanger les rôles de A et B .
- 2 D'après la propriété précédente, $\bar{A}$ et B sont indépendants. donc d'après 1. du corollaire, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.