Cours de terminale S
Etudes de limites de suites

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2019-2020

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors ....

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Majoration : si $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors ....

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Majoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A; +\infty[$.

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A; +\infty[$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Alors pour tout $n \geq p$, on a $v_n \geq u_n > A$, donc $v_n \in]A; +\infty[$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

La démonstration est analogue pour le théorème de majoration.

Théorème (Théorème "des gendarmes" (admis))

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ.
On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) ....

Théorème (Théorème "des gendarmes" (admis))

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ.
On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge également vers ℓ

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) ....

....

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) ....

....

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) ....

Théorème

Soit q un réel.
Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) :

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation :

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1+ka$

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à -dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1+ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à -dire $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à -dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1 + ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à -dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1 + ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.
On en déduit que $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$ car $1 + a > 0$.

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) : montrons d'abord par récurrence la propriété P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a réel positif, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$; donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un certain entier k, P_k est vraie, soit $(1+a)^k \geq 1 + ka$ et montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à -dire $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$;
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$ et $(1+a)^k \geq 1 + ka$ d'après l'hypothèse de récurrence.
On en déduit que $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$ car $1 + a > 0$.
Ainsi : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$ car $ka^2 \geq 0$, et P_{k+1} est vraie.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Nous avons montré la propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
si $a \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On pose maintenant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, donc $q > 1$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P_n.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.