Cours de terminale S
Limites et composée de la fonction exponentielle

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2018-2019

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = \dots\dots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \dots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$$

Démonstration (ROC)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

Démonstration (ROC)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x)\geq 0$.

Démonstration (ROC)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

Démonstration (ROC)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$
d'où : $e^x > x$.

Démonstration (ROC)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$
d'où : $e^x > x$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Démonstration (ROC)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$ et d'après le corollaire précédent, $f'(x)\geq 0$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0)=1$.
On en déduit que, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f(x)>0$
d'où : $\mathrm{e}^x>x$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x=+\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\mathrm{e}^x=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim\limits_{X\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^X}=0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent).

On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.

On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.
La courbe passe par les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1; e)$.

On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.
La courbe passe par les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1; e)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $e^0 = 1$.

On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.
La courbe passe par les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1; \mathrm{e})$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\mathrm{e}^0 = 1$.

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, la courbe représentative de la fonction exponentielle admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$, soit l'axe des abscisses.

Fonction exponentielle

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \exp x$	
$f(x) = \exp x$	

Fonction exponentielle

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x) = \exp x$	$+$	
$f(x) = \exp x$		

Fonction exponentielle

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \exp x$	$+$
$f(x) = \exp x$	0

Fonction exponentielle

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x) = \exp x$	$+$	
$f(x) = \exp x$	0	$+\infty$

Fonction exponentielle

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x) = \exp x$	$+$	
$f(x) = \exp x$	0 $\nearrow$	$+\infty$

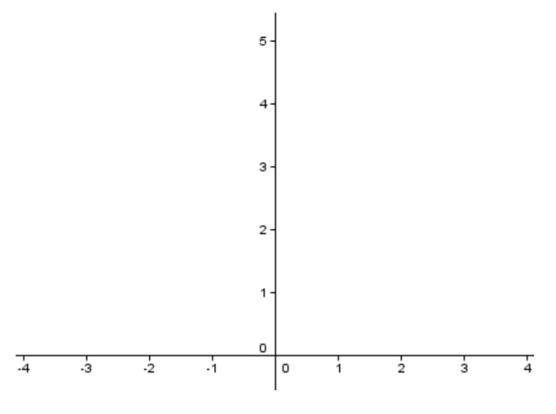

FIGURE – *Courbe représentative de la fonction exponentielle*

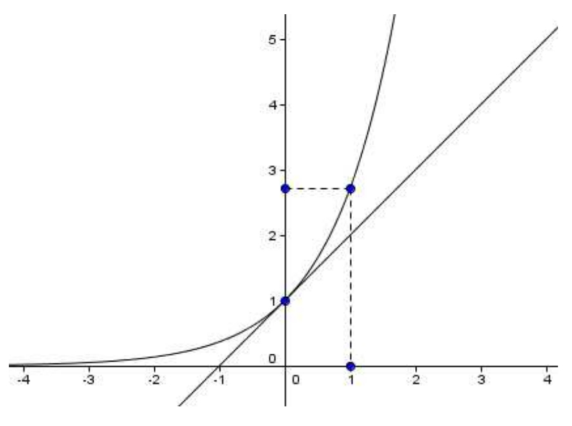

FIGURE – *Courbe représentative de la fonction exponentielle*

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \ldots\ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x e^x = \dots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par
$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente,
$g'(x) > 0$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}.$$

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente, $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente, $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g(x) > 0$, soit

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente,
$g'(x) > 0$.
La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g(x) > 0$, soit

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison,

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et d'après la démonstration précédente, $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g(x) > 0$, soit

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = e^x - x$ et d'après la démonstration précédente, $g'(x) > 0$.

La fonction g est donc croissante et de plus $g(0) = 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g(x) > 0$, soit

$e^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\dfrac{X}{e^X} = 0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent.)

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le ....

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le ....

....

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

$\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 qui est $\exp 0 = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x} = 1.$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$,
$(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$,
$(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k \exp(-kx)$$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k\exp(-kx)$$

Plus généralement, on montre que :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = \dots$$

Nous savons que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = -k \exp(-kx)$$

Plus généralement, on montre que :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : $(\exp(-kx^2))' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque
e^u étant strictement positif, le signe de $(e^u)'$ est le même que celui de u'.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : $(\exp(-kx^2))' = -2kx\exp(-kx^2)$