# Chapitre 14 : Limites et composée de la fonction exponentielle

## 1 Limites et variations

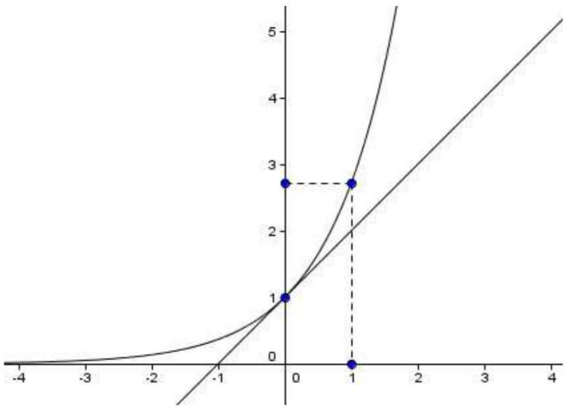
**Théorème**

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots$$

**Démonstration**
On considère la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

**Tableau de variation et représentation graphique**
On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents.
La courbe passe par les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1; \mathrm{e})$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse $0$ a pour coefficient directeur $\mathrm{e}^0 = 1$.
Puisque $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, la courbe représentative de la fonction exponentielle admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$, soit l'axe des abscisses.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x) = \exp x$ | $+$ |
| $f(x) = \exp x$ | $0 \nearrow +\infty$ |




## 2 Limites et comparaisons

**Théorème**

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x\mathrm{e}^x = \ldots$$

**Démonstration**
On considère la fonction $g$ définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} -\frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$$ (par inverse en utilisant le résultat précédent.)

**Théorème**

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \ldots$$

**Démonstration**

$\dfrac{\mathrm{e}^{0+x} - \mathrm{e}^0}{x}$ est le ..........................................

Sa limite quand $x$ tend vers 0 est le ..........................................
.....................

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$..

# 3 Calcul de dérivées

Nous savons que si $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$.

En appliquant ce résultat à la fonction exponentielle, (avec $a = -k$ et $b = 0$), on obtient :

$$(\exp(-kx))' = \ldots\ldots\ldots$$

Plus généralement, on montre que :

si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, alors la fonction $\mathrm{e}^u$ est dérivable sur $I$ et

$$(\mathrm{e}^u)' = \ldots\ldots\ldots$$

**Remarque**
$\mathrm{e}^u$ étant strictement positif, le signe de $(\mathrm{e}^u)'$ est le même que celui de $u'$.

Nous avons vu dans un chapitre précédent que : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
On constate que ces dérivées satisfont toutes à la formule générale :

$$(f(u(x))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : $(\exp(-kx^2))' = \ldots\ldots\ldots$