Cours de terminale S
Étude graphique des intégrales

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2018-2019

Définition

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est

Définition

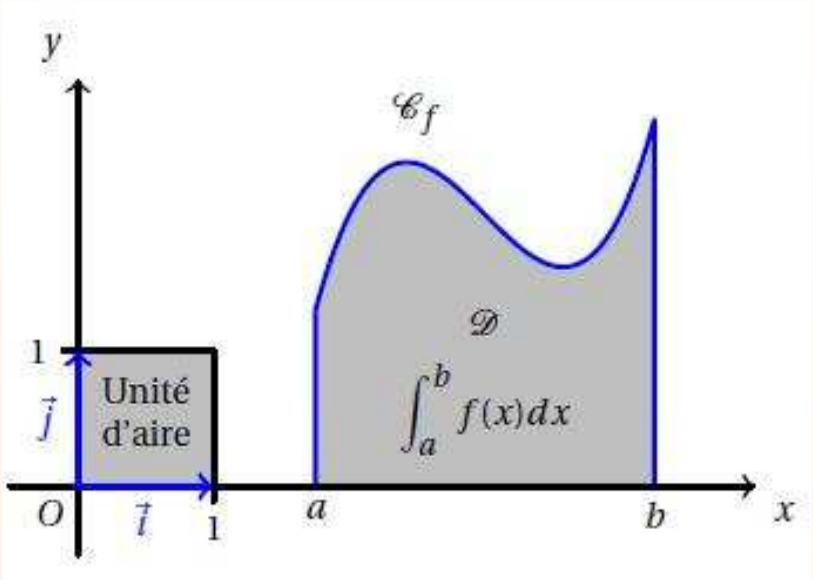
Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

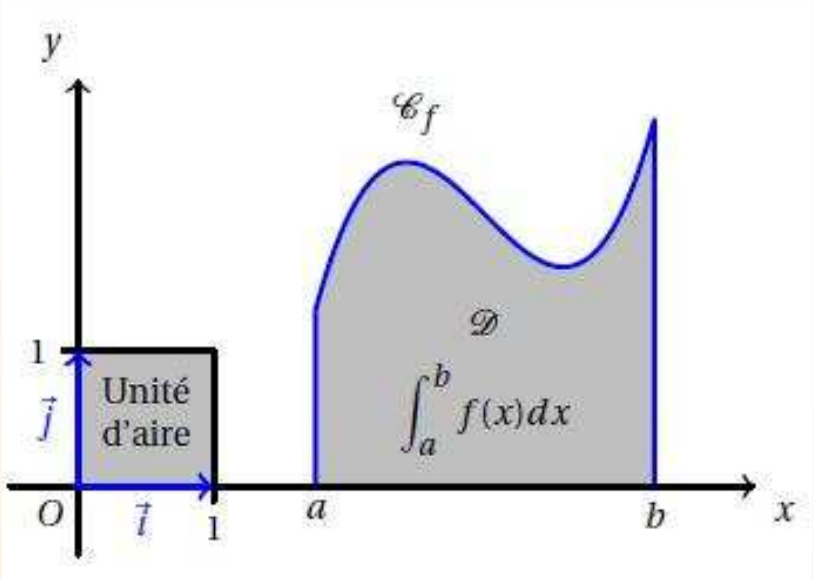
On appelle **intégrale de f sur** $[a; b]$,
.....
.....
.....

Définition

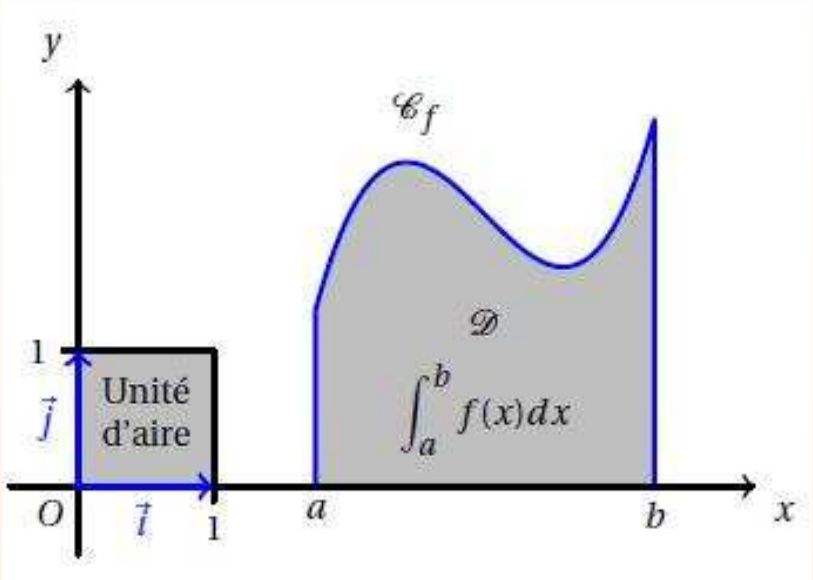
Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

On appelle **intégrale de f sur** $[a; b]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.


y
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{D}$
$\int_a^b f(x)dx$
1
Unité
d'aire
$\vec{j}$
$\vec{i}$
O
1
a
b
x



L'intégrale de f sur $[a; b]$ se note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



L'intégrale de f sur $[a; b]$ se note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On dit aussi que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente **l'aire sous la courbe** entre a et b.

Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, *x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \ldots$$

Remarque

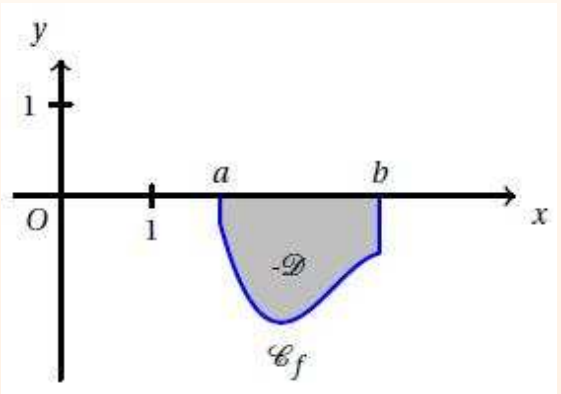
Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, *x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \ldots$$

$\int_a^b f(x)dx$ *se lit aussi " somme de a à b de* $f(x)dx$ *".*

Définition

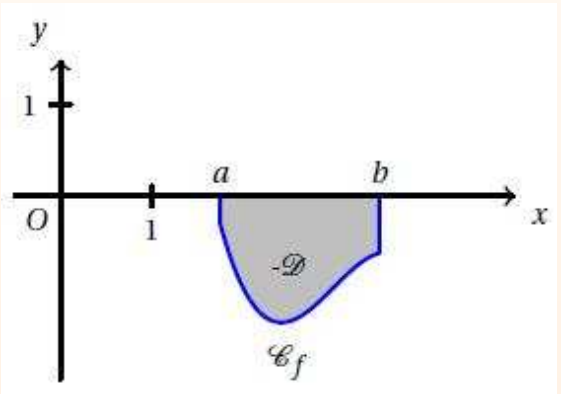
Si f est un fonction continue, négative sur $[a; b]$. On appelle intégrale de f sur $[a; b]$



Définition

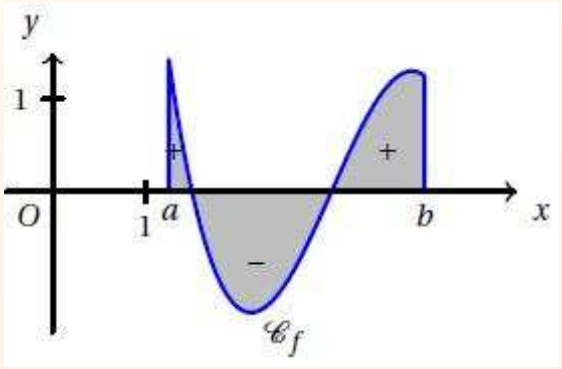
Si f est un fonction continue, négative sur $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et on note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\text{Aire}(\mathcal{D})$$



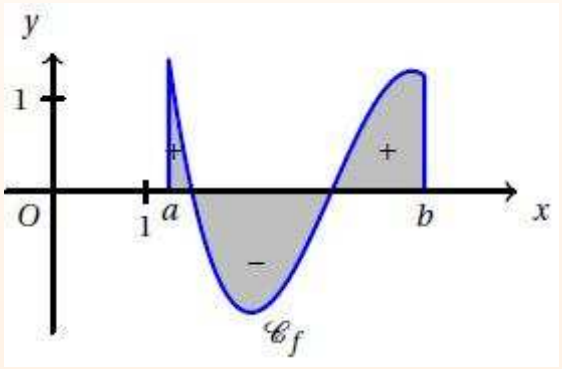
Définition

Si f est un fonction continue qui change de signe sur $[a; b]$. On appelle intégrale de f sur $[a; b]$



Définition

Si f est un fonction continue qui change de signe sur $[a; b]$. On appelle intégrale de f sur $[a; b]$ la différence entre l'aire obtenue quand f est positive et l'aire obtenue quand f est négative.



Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x =$	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x =$	$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x =$	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x =$	$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x =$	$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

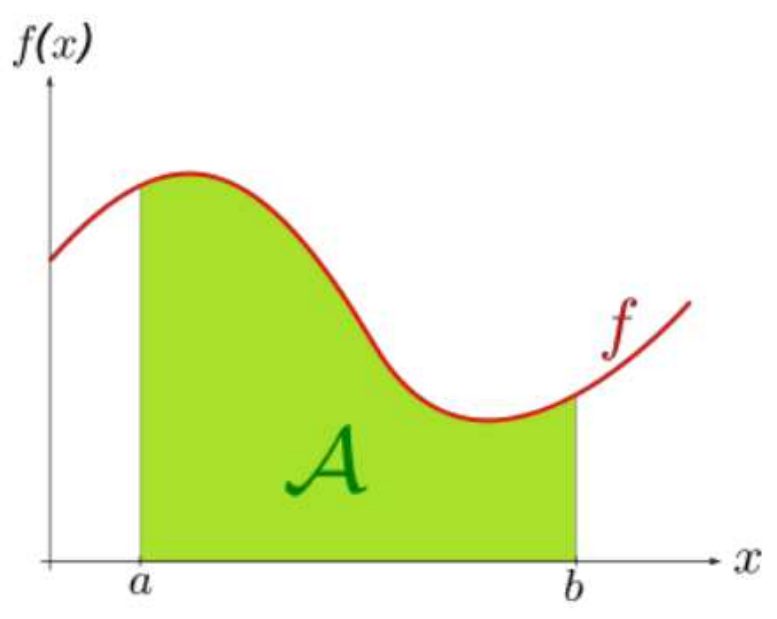
Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$	$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$	$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

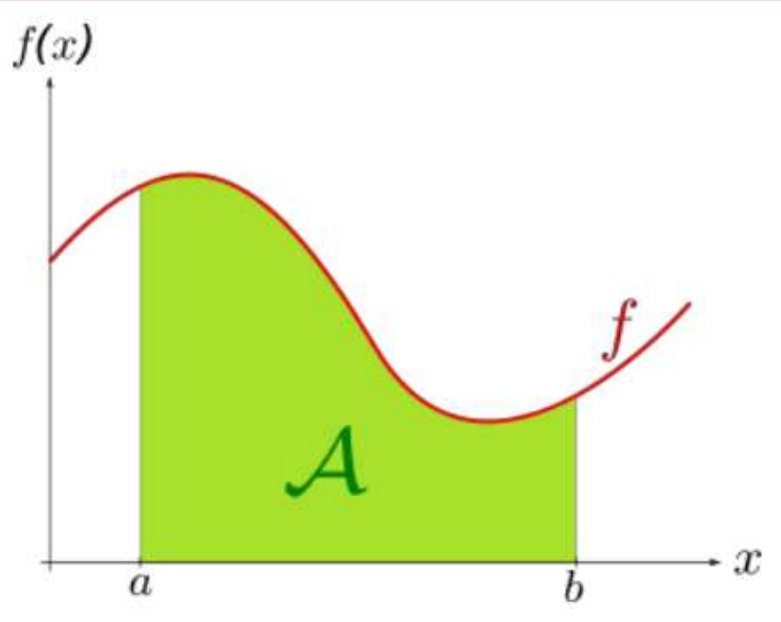
Propriété (Positivité)

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$ Alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \ldots\ldots$



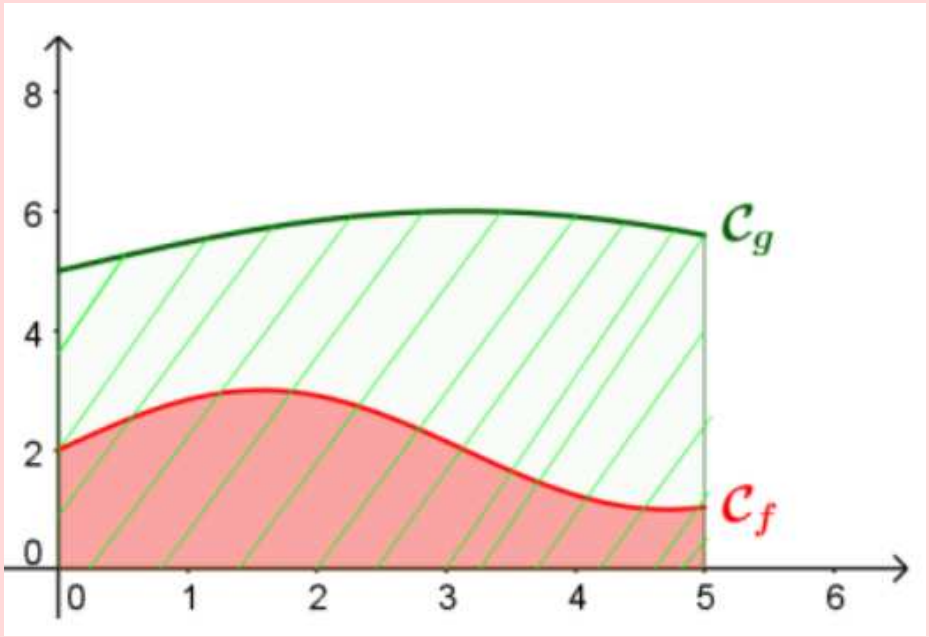
Propriété (Positivité)

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$ Alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$



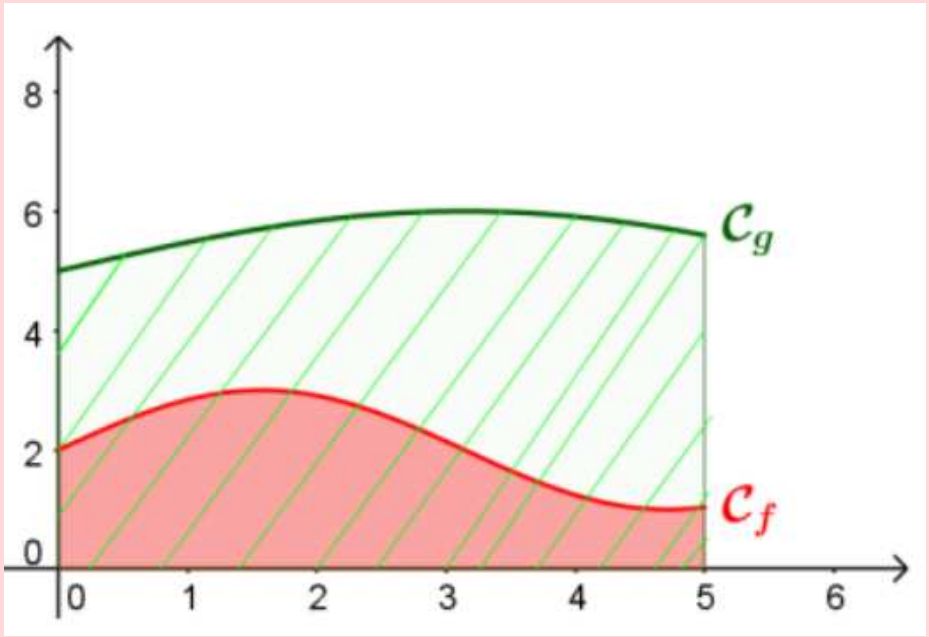
Propriété (Relation d'ordre)

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$ Alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \ldots\ldots$



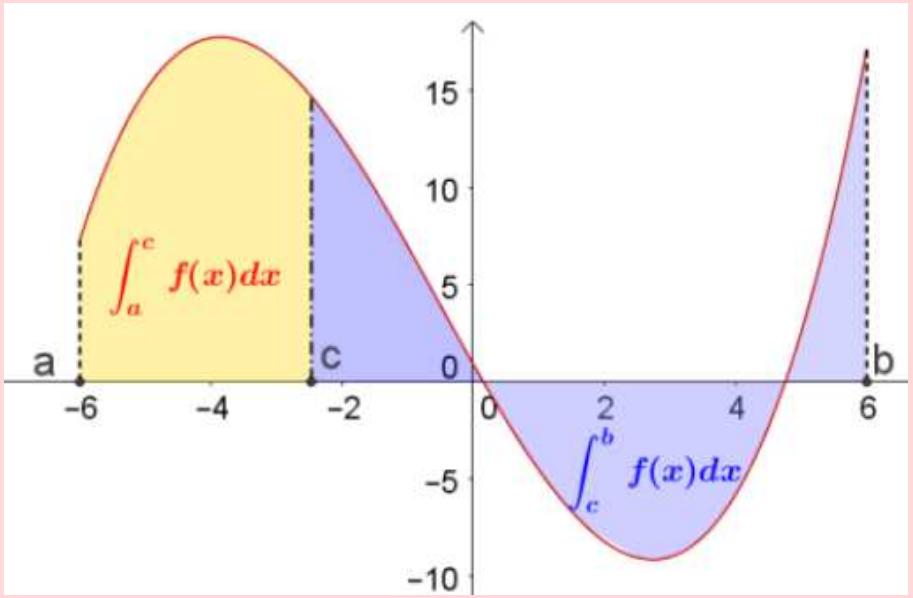
Propriété (Relation d'ordre)

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$ Alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$



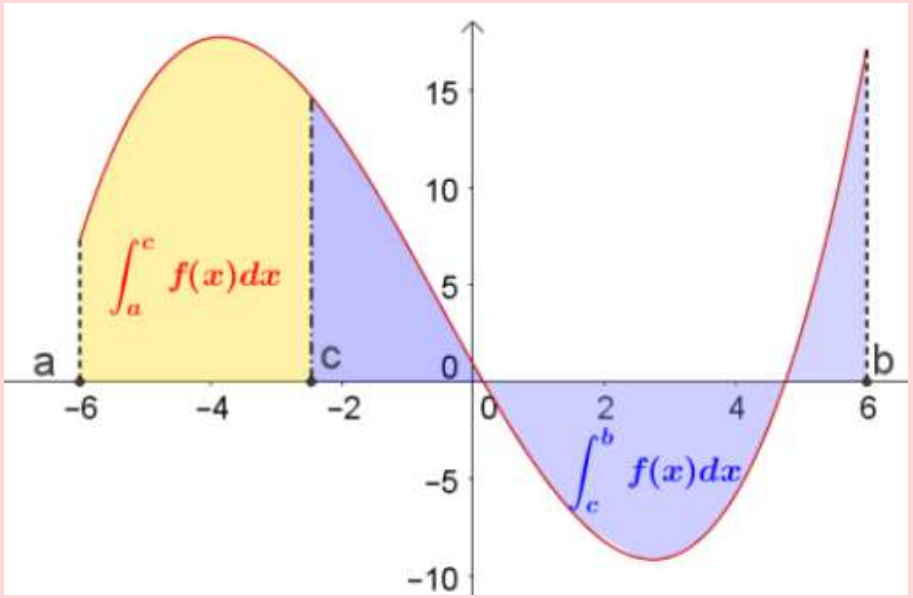
Propriété (Relation de Chasles)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Propriété (Relation de Chasles)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

. . . . . .

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

. . . . . .

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

$$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est négative sur } [a; b]$$

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

$$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est négative sur } [a; b]$$

Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

. . . . . .

Calcul d'aires

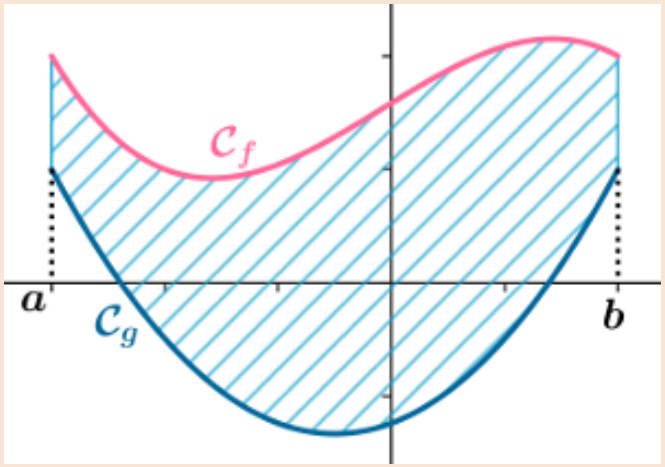
si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$



Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

. . . . . .

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

et si $a < b$,

. . . . . .

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

et si $a < b$,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M$$

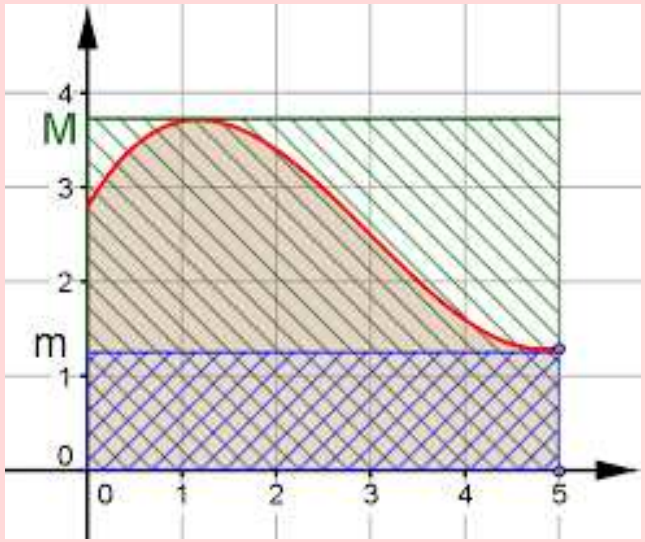
Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

et si $a < b$,

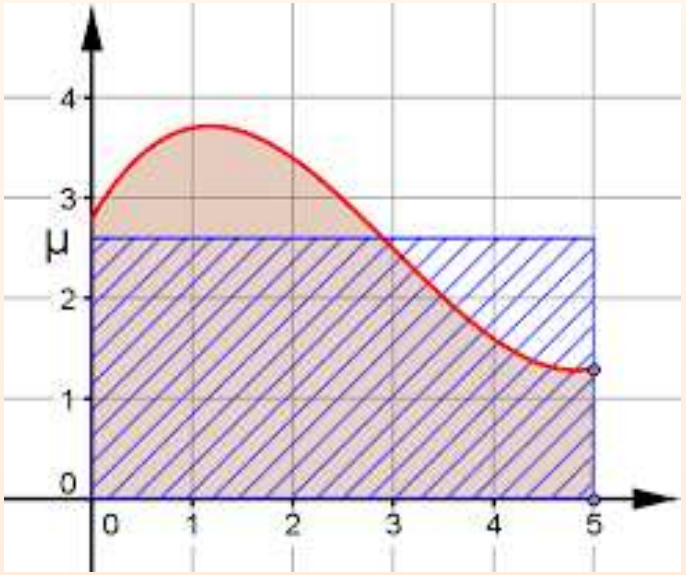
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M$$



Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

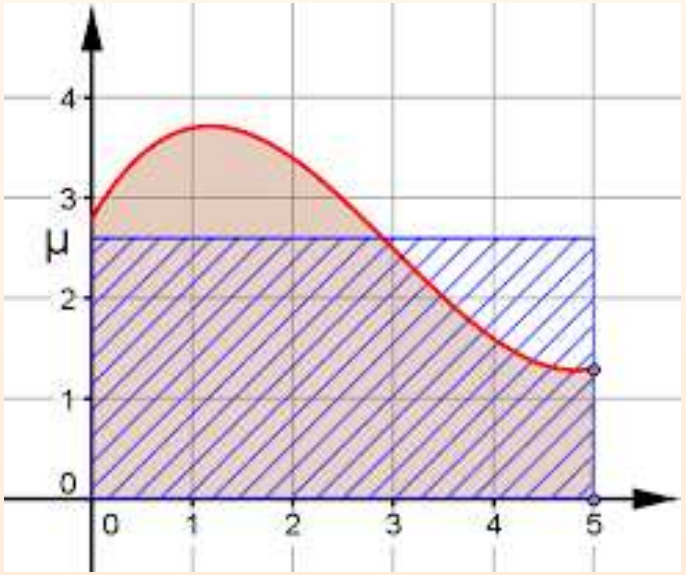
. . . . . .



Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

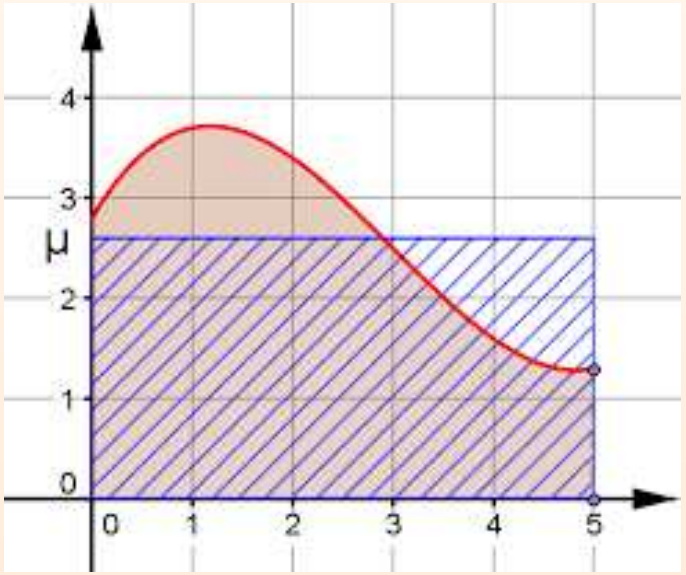
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ le nombre

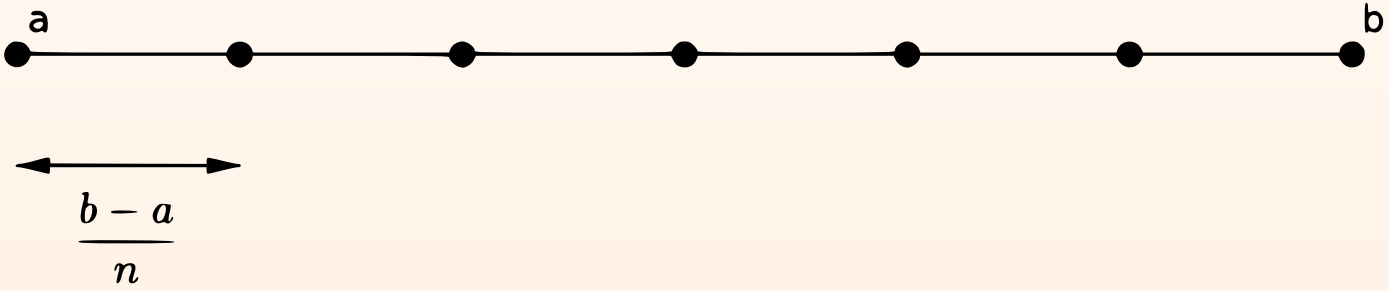
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

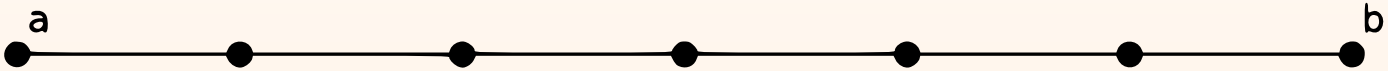
Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

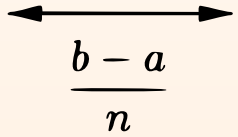
On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.



Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.

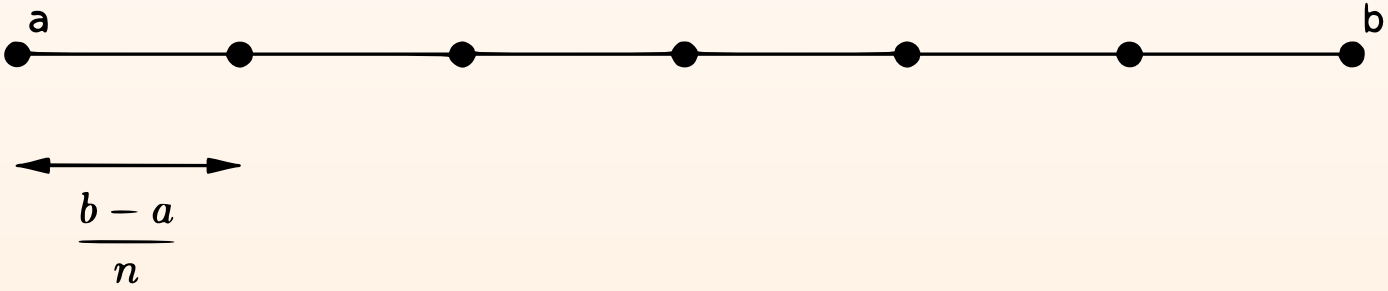




Sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i + 1)h]$, où i varie de 0 à $n - 1$, on a l'encadrement .....

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

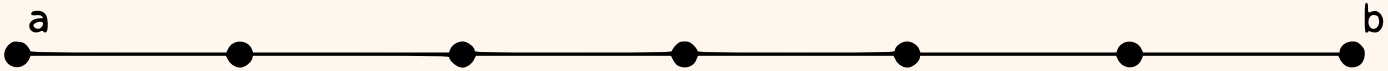
On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.

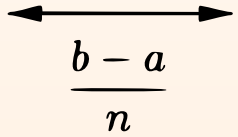


Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement $f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.



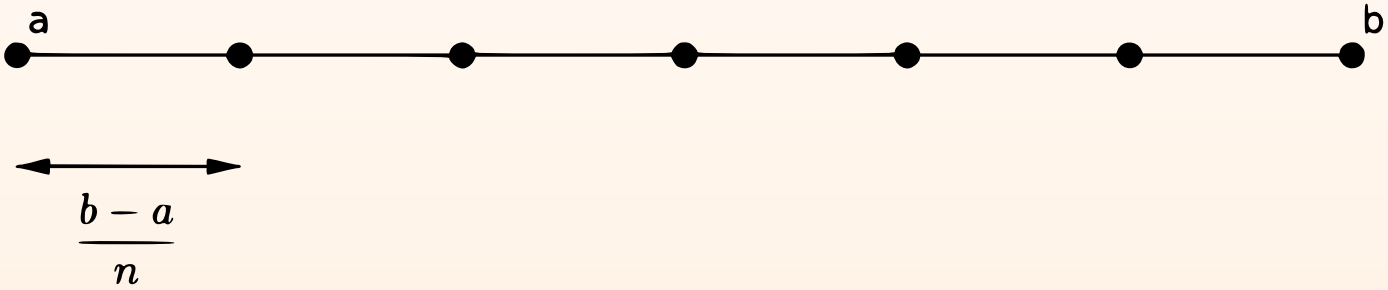


Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement $f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$

Donc .....

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.

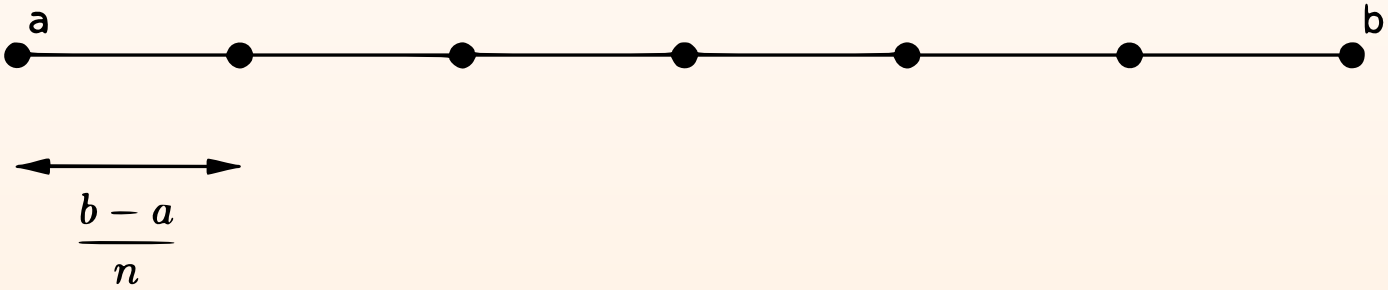


Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement $f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$

Donc $hf(a+ih) \leq \displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\mathrm{d}x \leq hf(a+(i+1)h)$

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.



Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement $f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$

Donc $hf(a+ih) \leq \displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\mathrm{d}x \leq hf(a+(i+1)h)$, où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

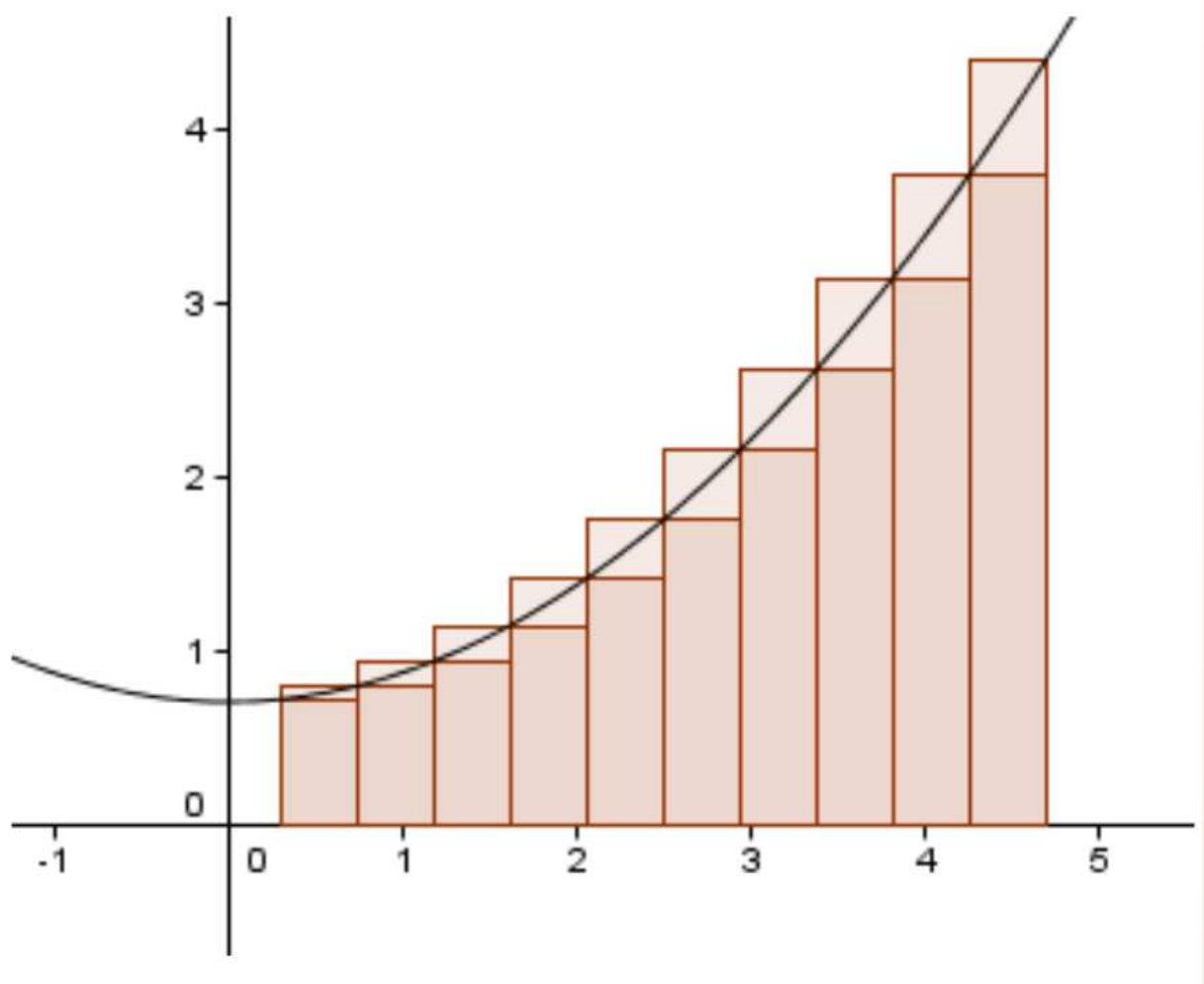
. . . . . .

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)h)$$

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)h)$$


4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
5

Algorithme

Les variables sont a et b les bornes de l'intervalle, n le nombre de rectangles, h le pas (largeur des rectangles, x l'abscisse courante, linf et lsup les sommes des aires.

$h \leftarrow (b-a)/n$
linf $\leftarrow 0$
lsup $\leftarrow 0$
$x \leftarrow a$
POUR i variant de 0 à $n-1$
    linf $\leftarrow$ linf $+f(x)$
    $x \leftarrow x+h$
    lsup $\leftarrow$ lsup $+f(x)$
FIN POUR
linf $\leftarrow h$*linf
lsup $\leftarrow h$*lsup

```
11      POUR i variant de 0 à n-1
12          linf PREND LA VALEUR linf+f(x)
13          x PREND LA VALEUR x+h
14          lsup PREND LA VALEUR lsup+f(x)
15      FIN POUR
16      linf PREND LA VALEUR h*linf
17      lsup PREND LA VALEUR h*lsup
18      AFFICHER linf, lsup
19  FIN ALGORITHME
```

Si la fonction f est simplement continue sur $[a; b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant, sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, $f(x)$ par $f(a+(i+1/2)h)$.