Chapitre 16 : Calculs d'aires et étude graphique des intégrales

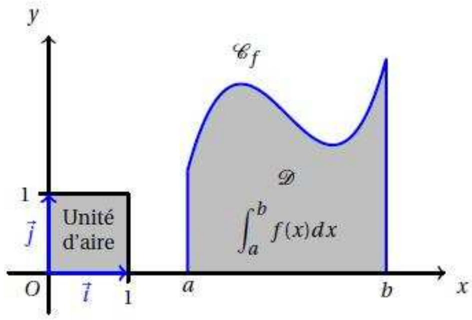
1 Intégrale d'une fonction continue

1.1 Fonctions positives

Définition

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;I,J)$.
On appelle **unité d'aire**, l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

On appelle **intégrale de** f **sur** $[a;b]$, ...
....
....



L'intégrale de f sur $[a;b]$ se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On dit aussi que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente **l'aire sous la courbe** entre a et b.

Remarque
Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, *$x$ est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \dots$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit aussi " somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ".

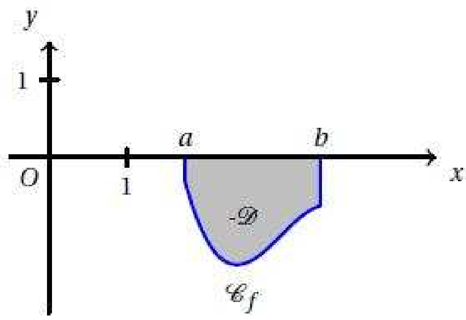
On étend la notion d'intégrale pour une fonction non positives :

1.2 Fonctions négatives

Définition

Si f est un fonction continue, négative sur $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et on note :

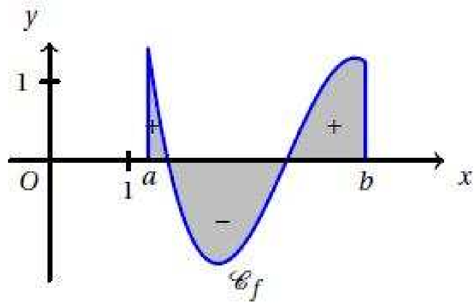
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{Aire}(\mathcal{D})$$



1.3 Fonctions quelconques

Définition

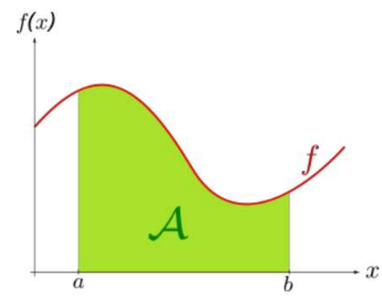
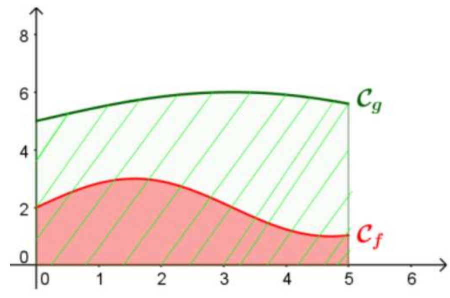
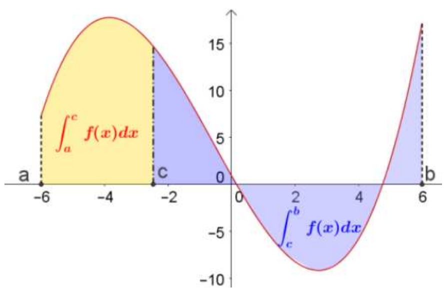
Si f est un fonction continue qui change de signe sur $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ la différence entre l'aire obtenue quand f est positive et l'aire obtenue quand f est négative.



1.4 Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité		Bornes de l'intégrale	
$\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x =$	$\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x =$	$\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \dots$	$\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$ ....

Positivité	**Relation d'ordre**	**Relation de Chasles**
Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \ldots\ldots$	Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \ldots\ldots$	$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
		

2 Calcul d'aires

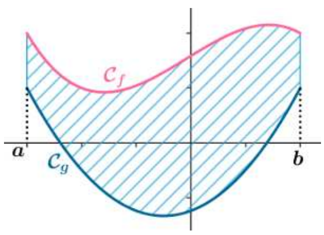
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

— L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

— si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :



$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

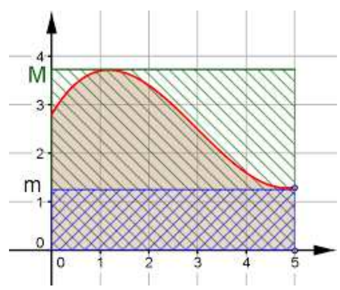
3 Valeur moyenne

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

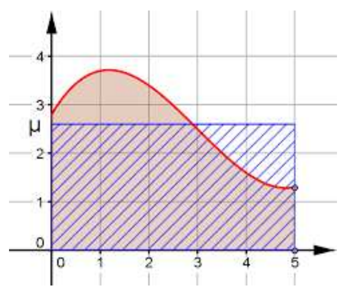
et si $a < b$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ le nombre

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



4 Encadrement

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a;b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a;b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

. . . .

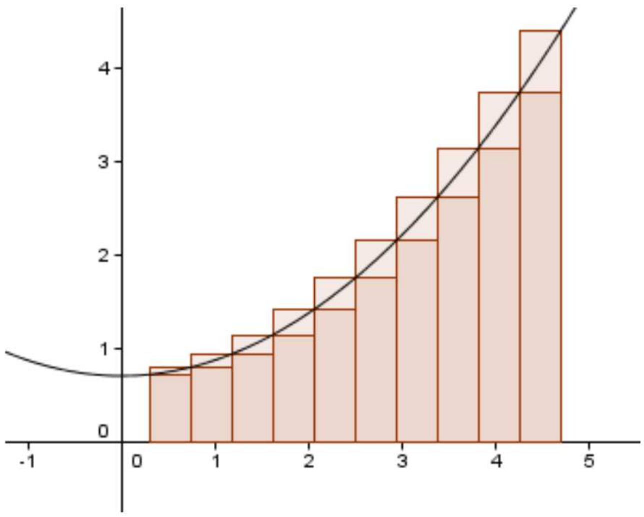
Donc . . . .

où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

. . . .

On peut écrire un programme afin d'effectuer ce calcul.



Algorithme

Les variables sont a et b les bornes de l'intervalle, n le nombre de rectangles, h le pas (largeur des rectangles, x l'abscisse courante, Iinf et Isup les sommes des aires.

$h \leftarrow (b-a)/n$
Iinf $\leftarrow 0$
Isup $\leftarrow 0$
$x \leftarrow a$
POUR i variant de 0 à $n-1$
    Iinf $\leftarrow$ Iinf $+f(x)$
    $x \leftarrow x+h$
    Isup $\leftarrow$ Isup $+f(x)$
FIN POUR
Iinf $\leftarrow$ h*Iinf
Isup $\leftarrow$ h*Isup

Si la fonction f est simplement continue sur $[a;b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant, sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, $f(x)$ par $f(a+(i+1/2)h)$.