Cours de terminale S
Intégrales et primitives

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2018-2019

Introduction

Grande découverte cette année en Terminale, les primitives et les intégrales de fonctions ! Jusqu'à présent vous saviez calculer la dérivée d'une fonction, à présent vous allez devoir trouver sa **primitive**, c'est à dire faire le travail inverse.

Introduction

Grande découverte cette année en Terminale, les primitives et les intégrales de fonctions ! Jusqu'à présent vous saviez calculer la dérivée d'une fonction, à présent vous allez devoir trouver sa **primitive**, c'est à dire faire le travail inverse. Connaissant une fonction f, on voudra déterminer une fonction F telle que la dérivée de F : F' soit égale à f. C'est à dire $F' = f$.

Introduction

Grande découverte cette année en Terminale, les primitives et les intégrales de fonctions ! Jusqu'à présent vous saviez calculer la dérivée d'une fonction, à présent vous allez devoir trouver sa **primitive**, c'est à dire faire le travail inverse.
Connaissant une fonction f, on voudra déterminer une fonction F telle que la dérivée de F : F' soit égale à f. C'est à dire $F' = f$.
Existe t-il une primitive pour n'importe qu'elle fonction ?

Introduction

Grande découverte cette année en Terminale, les primitives et les intégrales de fonctions ! Jusqu'à présent vous saviez calculer la dérivée d'une fonction, à présent vous allez devoir trouver sa **primitive**, c'est à dire faire le travail inverse.
Connaissant une fonction f, on voudra déterminer une fonction F telle que la dérivée de F : F' soit égale à f. C'est à dire $F' = f$.
Existe t-il une primitive pour n'importe qu'elle fonction ? Est-ce simple de les déterminer ?

Introduction

Grande découverte cette année en Terminale, les primitives et les intégrales de fonctions ! Jusqu'à présent vous saviez calculer la dérivée d'une fonction, à présent vous allez devoir trouver sa **primitive**, c'est à dire faire le travail inverse.
Connaissant une fonction f, on voudra déterminer une fonction F telle que la dérivée de F : F' soit égale à f. C'est à dire $F' = f$.
Existe t-il une primitive pour n'importe qu'elle fonction ? Est-ce simple de les déterminer ? A quoi cela peut-il servir ?

Introduction

Grande découverte cette année en Terminale, les primitives et les intégrales de fonctions ! Jusqu'à présent vous saviez calculer la dérivée d'une fonction, à présent vous allez devoir trouver sa **primitive**, c'est à dire faire le travail inverse.
Connaissant une fonction f, on voudra déterminer une fonction F telle que la dérivée de F : F' soit égale à f. C'est à dire $F' = f$.
Existe t-il une primitive pour n'importe qu'elle fonction ? Est-ce simple de les déterminer ? A quoi cela peut-il servir ?
On répondra à toutes ces questions dans ce chapitre !

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ......

....

....

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $[a; b]$.

De plus $F(a) = 0$.

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $[a; b]$.

De plus $F(a) = 0$.

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, ...

. . . .

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a;b]$ et $h > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Or $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Or $$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est ....

....

....

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

$$\text{Or } F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses x et $x+h$.

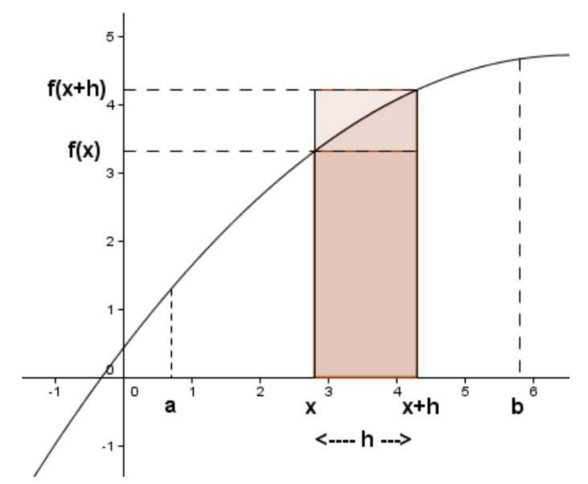
Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a;b]$ et $h > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Or
$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses x et $x+h$.


5
f(x+h)
4
f(x)
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
a
x
x+h
b
<---- h --->

On sait que f est croissante sur $[a, b]$.
On a donc ....
....
....

On sait que f est croissante sur $[a, b]$.
On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui entraîne que $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

On sait que f est croissante sur $[a, b]$.
On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui entraîne que $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \ldots$

On sait que f est croissante sur $[a, b]$.
On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui entraîne que $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

On sait que f est croissante sur $[a, b]$.
On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui entraîne que $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

....

....

On sait que f est croissante sur $[a, b]$.
On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui entraîne que $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ ce qui signifie que F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$.

On sait que f est croissante sur $[a, b]$.
On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui entraîne que $f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ ce qui signifie que F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si . . . .
. . . .

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que . . . .
. . . .

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que ....
....

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que ....
....

Définition

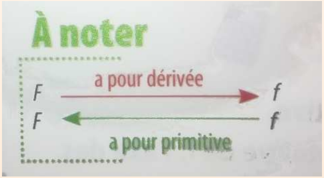
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que " f est la fonction dérivée de F sur I ".

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que " f est la fonction dérivée de F sur I ".



Exemple

- $f(x) = 2$ *a pour primitive* $F(x) = \dots\dots\dots$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exemple

- $f(x) = 2$ *a pour primitive* $F(x) = \ 2x \ $ *sur* $\mathbb{R}$.
- $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *a pour primitive* $G(x) = \ \ldots\ldots\ldots$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exemple

- $f(x) = 2$ *a pour primitive* $F(x) = \ 2x$ *sur* $\mathbb{R}$.
- $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *a pour primitive* $G(x) = \ \sqrt{x}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Théorème

Toute fonction continue . . . .
. . . .

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.

Si f est positive, ...

....

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.

Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.

Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.

Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;

g est ....

....

....

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.
Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par
$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;
g est continue et positive sur $[a; b]$, donc admet une primitive G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. Alors la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a; b]$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.
Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par
$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;
g est continue et positive sur $[a; b]$, donc admet une primitive G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. Alors la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a; b]$.

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, ...

....

....

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de f sur I.

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de f sur I.

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de f sur I.

Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; . . . . . .
. . . .

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par ....

....

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors ....
....

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

• si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I.

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0:+\infty[$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0 : +\infty[$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0:+\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0:+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax + b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n\,,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n\,,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$	$I = J$	$F(x) =$

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)\,,\; a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)\,,\; a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n\,,\; n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$	$I = J$	$F(x) = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$I = K$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n\,,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$	$I = J$	$F(x) = e^u$
$f = \frac{u'}{u}$	$I = K$	$F(x) = \ln u$

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors ....
....

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Démonstration

....

....

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

....

....

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

....

....

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :

....

....

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :
si F une primitive quelconque de f, alors $F(x) = G(x) + c$ et on vérifie alors que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.

. . . .
. . . .

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

. . . .

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Exemple

Pour $x > 0$, $$\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

Notation

$$[F(x)]_a^b =$$

Notation

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notation

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Conséquence

On peut donc réécrire la définition de cette façon :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x =$$

Exemple

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

Exemple

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} =$$

Exemple

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Remarque

Toutes les propriétés vues sur les intégrales (dans un chapitre précédent : linéarité, relation de Chasles, inégalités, bornes) peuvent se démontrer avec la définition vue plus haut.