Chapitre 17 : Primitives et intégrales

1 Primitive

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$; la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

....

....

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a;b]$ et $h>0$, ...

Or $F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t+\int_x^a f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$

Ainsi $F(x+h)-F(x)$ est ....

....

On sait que f est croissante sur $[a,b]$.

On a donc ....

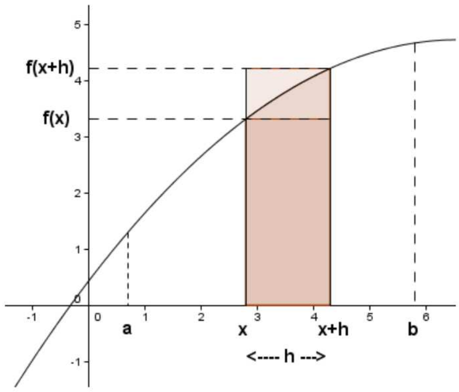
....

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=\ldots\ldots$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

....

....

....

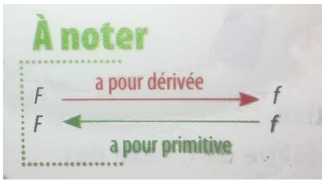


Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si ....

....



" F est une primitive de f sur I " a le même sens que ....

Exemple

- $f(x)=2$ a pour primitive $F(x)=\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.
- $g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ a pour primitive $G(x)=\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Toute fonction continue ....

Démonstration dans le cas où $I=[a;b]$.

Si f est positive, ...

Sinon, on admet que f a un minimum m sur $[a;b]$ et on défini une fonction g sur $[a;b]$, par $g(x)=f(x)-m$;
g est ....

....

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, ...

....

Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x)=F(x)+c$ où c est un nombre réel quelconque.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque;
....
....

Démonstration
Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par ....
....
En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors F ....
....

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :
• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
• si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I.

Primitives des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0 : +\infty[$	....
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0 : +\infty[$	....
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	....
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	....

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = \sin(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	....
$f = u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	....
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	....
$f = u'\mathrm{e}^u$	$I = J$	....
$f = \dfrac{u'}{u}$	$I = K$	....

2 Liens Primitives-Intégrales

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$.

Alors ....

On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

....

....

....

....

....

....

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.

....

On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple

$$\text{Pour } x > 0, \qquad \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

Notation

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Conséquence

On peut donc réécrire la définition de cette façon :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x =$$

Remarque

Toutes les propriétés vues sur les intégrales (dans un chapitre précédent : linéarité, relation de Chasles, inégalités, bornes) peuvent se démontrer avec la définition vue plus haut.

Exercice : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Compléter et démontrer les propriétés ci-dessous à l'aide de la nouvelle définition :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \text{ où F est une primitive de f sur } I$$

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x =$	$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x =$	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \dots$	$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$ ....
Démonstration :	Démonstration :	Démonstration :	Démonstration :

Positivité	**Relation d'ordre**	**Relation de Chasles**
Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \dots\dots$	Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \dots\dots$	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ....
Démonstration :	Démonstration : *Aide : considérer la fonction $h = g - f$.*	Démonstration :