

Cours de terminale S

Forme exponentielle d'un nombre complexe

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2018-2019

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos \theta + i \sin \theta$
avec $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos \theta + i \sin \theta$
avec $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

On note f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre
complexe $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos \theta + i \sin \theta$ avec $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

On note f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

On se propose de démontrer que pour tous réels θ et θ' , $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

$$f(\theta) \times f(\theta') =$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta']$$

=

$$\begin{aligned}f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] \\&= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] \\&= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta]\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f(\theta) \times f(\theta') =$$

$$\begin{aligned}f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] \\&= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta]\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') =$$

$$\begin{aligned}f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] \\&= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta]\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$$

$$\begin{aligned}f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] \\&= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta]\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$$

De plus, $f(0) =$

$$f(\theta) \times f(\theta') = [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta']$$

$$= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta]$$

$$\text{D'où : } f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$$

$$\text{De plus, } f(0) = \cos 0 + i \sin 0 =$$

$$\begin{aligned}f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] \\&= [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta]\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$$

$$\text{De plus, } f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors
 $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$,

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$, ce qui justifie cette notation exponentielle.

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} =$$

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Exemples

$$e^{i\pi} =$$

Exemples

$$e^{i\pi} = -1 ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

Exemples

$$e^{i\pi} = -1 ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Propriété

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite

Exemples

$$e^{i\pi} = -1 ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Propriété

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite **notation exponentielle** :

$$z =$$

Exemples

$$e^{i\pi} = -1 ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Propriété

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$$

Propriété

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} =$$

Propriété

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} =$$

Propriété

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n =$$

Propriété

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} =$$

Propriété

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} =$$

Propriété

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} \quad \text{s'écrit :}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} \quad \text{s'écrit :}$$

$$\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta') = [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' - i \sin \theta']$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} \quad \text{s'écrit :}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' - i \sin \theta'] \\ &= \cos \theta \cos \theta' - i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \end{aligned}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} \quad \text{s'écrit :}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' - i \sin \theta'] \\ &= \cos \theta \cos \theta' - i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \\ &= [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'] + i[\sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'] \end{aligned}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$$e^{i(\theta - \theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} \quad \text{s'écrit :}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' - i \sin \theta'] \\ &= \cos \theta \cos \theta' - i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \\ &= [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'] + i[\sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'] \end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et}$$

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules d'addition et de duplication vues en Première en écrivant les membres de gauche et de droite sous forme trigonométrique :

Par exemple :

$$e^{i(\theta - \theta')} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} \quad \text{s'écrit :}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta') &= [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' - i \sin \theta'] \\ &= \cos \theta \cos \theta' - i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \\ &= [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'] + i[\sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'] \end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et}$$

$$\sin(\theta - \theta') = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'$$

Autre exemple :

$$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta} \quad \text{s'écrit :}$$

Autre exemple :

$$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta} \quad \text{s'écrit :}$$

$$\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta\end{aligned}$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cos \theta)\end{aligned}$$

Autre exemple :

$$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta} \text{ s'écrit :}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cos \theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ et}$$

Autre exemple :

$e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = e^{i\theta} \times e^{i\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i(2 \sin \theta \cos \theta)\end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien :

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$