

Cours de terminale S

Fonction exponentielle

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2019-2020

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

.....

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

Définition

Cette fonction est appelée

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**.

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**.

On note :

.....

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**.

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**.

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel :

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**.

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Définition

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**.

On note :

$$\exp : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x)$$

Ainsi pour tout x réel : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$
puisque'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$\phi'(x) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction

.....

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Or $\phi(0) = \dots\dots\dots$

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

$$\text{Or } \phi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1;$$

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Or $\phi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = \dots$

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Or $\phi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Or $\phi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,

soit $\exp(x) \exp(-x) = \dots$,

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Or $\phi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,

soit $\exp(x) \exp(-x) = 1$,

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Or $\phi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,

soit $\exp(x) \exp(-x) = 1$, d'où on conclut que

Propriété

Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x) \exp(-x)$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (\exp(x))' \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))' = \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction constante.

Or $\phi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1$; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = 1$,

soit $\exp(x) \exp(-x) = 1$, d'où on conclut que $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration du théorème (ROC)

Démonstration du théorème (ROC)

L'existence d'une telle fonction est admise.
On démontre l'unicité :

Démonstration du théorème (ROC)

L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On peut définir pour tout x réel une fonction u par

$$u(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)} \text{ car } \exp(x) \neq 0 \text{ pour tout } x.$$

Démonstration du théorème (ROC)

L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On peut définir pour tout x réel une fonction u par

$$u(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)} \text{ car } \exp(x) \neq 0 \text{ pour tout } x.$$

Alors $(u(x))' =$

Démonstration du théorème (ROC)

L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On peut définir pour tout x réel une fonction u par

$$u(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)} \text{ car } \exp(x) \neq 0 \text{ pour tout } x.$$

$$\text{Alors } (u(x))' = \frac{g'(x) \exp(x) - g(x) \exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$

Démonstration du théorème (ROC)

L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On peut définir pour tout x réel une fonction u par

$$u(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)} \text{ car } \exp(x) \neq 0 \text{ pour tout } x.$$

$$\text{Alors } (u(x))' = \frac{g'(x) \exp(x) - g(x) \exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$

Démonstration du théorème (ROC)

L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On peut définir pour tout x réel une fonction u par

$$u(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)} \text{ car } \exp(x) \neq 0 \text{ pour tout } x.$$

$$\text{Alors } (u(x))' = \frac{g'(x) \exp(x) - g(x) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} =$$

$$\frac{g(x) \exp(x) - g(x) \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

Démonstration du théorème (ROC)

L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On peut définir pour tout x réel une fonction u par

$$u(x) = \frac{g(x)}{\exp(x)} \text{ car } \exp(x) \neq 0 \text{ pour tout } x.$$

$$\text{Alors } (u(x))' = \frac{g'(x) \exp(x) - g(x) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} =$$

$$\frac{g(x) \exp(x) - g(x) \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

La fonction u de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $u(0) = 1$, on en déduit que $u(x) = 1$ pour tout x réel. Ceci signifie que $g(x) = \exp(x)$ pour tout x réel.

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.

Démonstration : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$; s'il existe un réel x tel que $\exp(x) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

.....
.....

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.

Démonstration : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$; s'il existe un réel x tel que $\exp(x) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **il existe a réel tel que $\exp(a) = 0$. Or ceci est impossible puisque pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.**

Théorème

Quels que soient les réels a et b :

.....

Théorème

Quels que soient les réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) =$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2}$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } g'(x) = 0$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

soit $g(x) =$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

soit $g(x) = g(0) =$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

$$\text{soit } g(x) = g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(0)} =$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

$$\text{soit } g(x) = g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a) \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

$$\text{soit } g(x) = g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a) \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

En particulier pour $x = b$, on a : $g(b) =$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

$$\text{soit } g(x) = g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a) \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

$$\text{En particulier pour } x = b, \text{ on a : } g(b) = \frac{\exp(a + b)}{\exp(b)} = \exp(a)$$

Démonstration

Soit a un réel quelconque. On pose, pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(x)} ;$$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x + a) \exp(x) - \exp(x + a) \exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

donc $g'(x) = 0$ pour tout x réel. La fonction g de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$,

$$\text{soit } g(x) = g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a) \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

$$\text{En particulier pour } x = b, \text{ on a : } g(b) = \frac{\exp(a + b)}{\exp(b)} = \exp(a)$$

d'où on déduit que $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$$\exp(x) =$$

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) =$$

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(\frac{x}{2}\right) =$$

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Puisqu'un carré est positif et que $\exp(x) \neq 0$, on montre à nouveau que $\exp(x) > 0$ pour tout x .

Propriété

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

.....

.....

.....

Propriété

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

$$\exp(a - b) =$$

Propriété

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

$$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

Propriété

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

$$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(-b) =$$

Propriété

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

$$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$$

Propriété

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

$$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$$

$$\exp(na) =$$

Propriété

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

$$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$$

$$\exp(na) = (\exp a)^n$$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) =$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) =$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) = \exp(a - b) \exp(b)$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) = \exp(a - b) \exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit :

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) = \exp(a - b) \exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a - b) =$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) = \exp(a - b) \exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) = \exp(a - b) \exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- l'égalité précédente avec $a = 0$ donne

$$\exp(-b) =$$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) = \exp(a - b) \exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- l'égalité précédente avec $a = 0$ donne

$$\exp(-b) = \frac{\exp(0)}{\exp(b)} =$$

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a - b) + b) = \exp(a - b) \exp(b)$

et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- l'égalité précédente avec $a = 0$ donne

$$\exp(-b) = \frac{\exp(0)}{\exp(b)} = \frac{1}{\exp(b)}$$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ ";

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) =$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) =$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
 $\exp((k+1)a) =$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
 $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) =$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
 $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka) \exp(a) =$

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
 $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka) \exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$
d'après l'hypothèse de récurrence,

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
 $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka) \exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$
d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$ et P_{k+1} est vraie.

Démonstration

- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ "; nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp a)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ; soit $\exp(ka) = (\exp a)^k$. Alors,
 $\exp((k+1)a) = \exp(ka + a) = \exp(ka) \exp(a) = (\exp a)^k \exp(a)$
d'après l'hypothèse de récurrence,
donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$ et P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,
 $\exp(na) = \dots\dots\dots$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = \dots\dots\dots$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

On en déduit que : $\exp(na) = \dots\dots\dots$

Démonstration

Maintenant, si n est un entier relatif négatif,

$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)}$$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = (\exp(a))^{-n}$

On en déduit que : $\exp(na) = \frac{1}{(\exp(a))^{-n}} = (\exp a)^n.$

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

.....

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = e.$$

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = e.$$

$e \simeq 2,718\dots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π .

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = e.$$

$e \simeq 2,718\dots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π .

On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
 $\exp(n) = \dots\dots\dots$

Notation

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$\exp(1) = e.$$

$e \simeq 2,718\dots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π .

On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
 $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n.$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

.....

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = e^x$$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut donc écrire : $e^0 = \dots$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut donc écrire : $e^0 = 1$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut donc écrire : $e^0 = 1$ et $(e^x)' = \dots$

Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut donc écrire : $e^0 = 1$ et $(e^x)' = e^x$.

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

.....

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a , b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} =$$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} =$$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-b} =$$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \quad e^{na} =$$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \quad e^{na} = (e^a)^n$$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \quad e^{na} = (e^a)^n$$

De plus, quels que soient les réels a, b : $e^{ab} = (e^a)^b$

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \quad e^{na} = (e^a)^n$$

De plus, quels que soient les réels a, b : $e^{ab} = (e^a)^b$

Par exemple : $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^x$ donc $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$ et en particulier,
 $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Théorème

La fonction exponentielle est

.....

Théorème

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par définition, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$ pour tout x réel ;
puisque sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on conclut
que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire

.....

Corollaire

$$a < b \iff$$

Corollaire

$$a < b \iff e^a < e^b \quad \text{et} \quad a = b \iff$$

Corollaire

$$a < b \iff e^a < e^b \quad \text{et} \quad a = b \iff e^a = e^b$$

Corollaire

$$a < b \iff e^a < e^b \quad \text{et} \quad a = b \iff e^a = e^b$$

En particulier : si $x < 0$ alors $e^x < 1$ et si $x > 0$ alors $e^x > 1$.