Chapitre 9 : Fonction exponentielle

1 Théorème et définition

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : ....

Définition

Cette fonction est appelée .... On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi pour tout x réel : ....

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration : soit ϕ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$\phi'(x) =$ ....

Si ϕ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction ....
Or $\phi(0) =$ ....; on en déduit que, pour tout x réel, $\phi(x) = \ldots$,
soit $\exp(x)\exp(-x) = \ldots$, d'où on conclut que ....

Démonstration du théorème
L'existence d'une telle fonction est admise.

On démontre l'unicité : soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut définir pour tout x réel une fonction u par $u(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(x)}$ car $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.

Alors $(u(x))' =$ ....

La fonction u de dérivée nulle est donc constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $u(0) = 1$, on en déduit que $u(x) = 1$ pour tout x réel. Ceci signifie que $g(x) = \exp(x)$ pour tout x réel.

Propriété

la fonction exponentielle est strictement positive : pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.

Démonstration : la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\exp(0) = 1$; s'il existe un réel x tel que $\exp(x) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ...

....

2 Relation fonctionnelle

Théorème

Quels que soient les réels a et b : . . . .

Démonstration :

Soit a un réel quelconque. . . . .

Remarque

Soit x un réel quelconque. A l'aide de la relation fonctionnelle, on peut écrire :
$\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2})) = \left(\exp(\frac{x}{2})\right)^2$.
Puisqu'un carré est positif et que $\exp(x) \neq 0$, on montre à nouveau que $\exp(x) > 0$ pour tout x.

Propriété

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

. . . .

Démonstration

On utilise la relation fonctionnelle :

- $\exp(a) = \exp((a-b)+b) = \exp(a-b)\exp(b)$ et puisque $\exp(b) \neq 0$, on en déduit : $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- l'égalité précédente avec $a = 0$ donne $\exp(-b) = \dfrac{\exp(0)}{\exp(b)} = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- Soit P_n la propriété " $\exp(na) = (\exp a)^n$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Hérédité :

Conclusion :

Maintenant, si n est un entier relatif négatif, $\exp(na) = \dots\dots\dots$

or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\exp((-n)a) = \dots\dots\dots$

On en déduit que : $\exp(na) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$..

Notation
On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle : ....

e $\simeq 2,718\ldots$ et n'est pas un nombre rationnel ; c'est un nombre qui a des propriétés commune à celle de π.

On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
Cette écriture se prolonge à $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image de x par la fonction exponentielle se note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut donc écrire : $\mathrm{e}^0 = \ldots$ et $(\mathrm{e}^x)' = \ldots\ldots$.

Utilisation : on peut écrire la relation fonctionnelle et les propriétés de la fonction exponentielle avec la nouvelle notation ; on reconnaît alors les propriétés bien connues du calcul avec des exposants :

Quels que soient les réels a, b et l'entier relatif n :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

De plus, quels que soient les réels a, b : $\mathrm{e}^{ab} = (\mathrm{e}^a)^b$
Par exemple : $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^x$ donc $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$ et en particulier, $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

3 Variations

Théorème
La fonction exponentielle est ....

Par définition, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$ pour tout x réel ; puisque sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on conclut que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire
.... et ....

En particulier : si $x < 0$ alors $\mathrm{e}^x < 1$ et si $x > 0$ alors $\mathrm{e}^x > 1$.