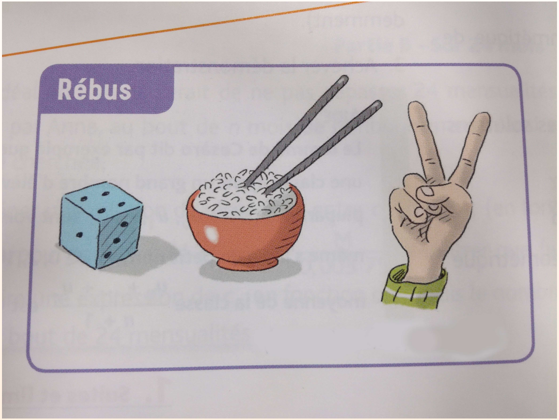
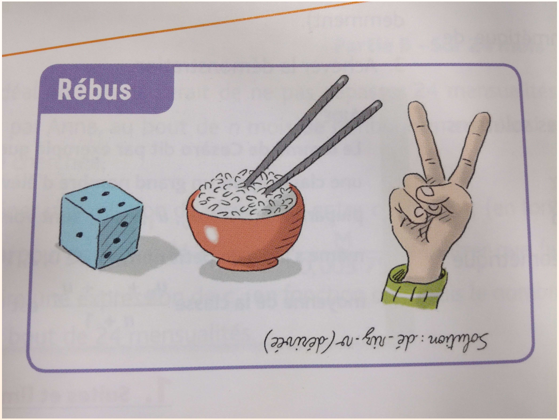
Cours de terminale S
Compléments sur les dérivées

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2019-2020


Rébus


Rébus
Solution : dé - riz - vé (dérivée)

Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Théorème

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.
Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Théorème

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.
Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Théorème

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et deux réels a et b fixés. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b) \in I$, et la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$.
Alors la fonction g est dérivable sur J et, pour tout x de J :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \ldots\ldots\ldots$$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $\left(\sqrt{u}\right)' = \ldots\ldots\ldots$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ et de $x \longmapsto (u(x))^n$.

Propriété 1 :
On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retient : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = \dots\dots\dots$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \ldots\ldots\ldots$$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$$

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = \ldots\ldots\ldots$

Propriété 2 :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$.

Propriété 2 :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si $n \geq 1$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et :

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ que l'on note aussi : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$.

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée

$$x \longmapsto v(u(x))$$

On admettra le résultat général :

$$(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée

$$x \longmapsto v(u(x))$$

On admettra le résultat général :

$$(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Remarque : ces deux propriétés sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée

$$x \longmapsto v(u(x))$$

On admettra le résultat général :

$$(v \circ u)'(x) = (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation :

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, la fonction $u^1 = u$ est dérivable sur I.

Preuve de la propriété 2 (premier point)

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : "u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, la fonction $u^1 = u$ est dérivable sur I. Sa dérivée est : $(u^1)' = u' = 1.u'.u^0$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. ($u^{k+1} = u^k.u$)

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' =$
$ku'u^k + u^k.u' =$

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' = ku'u^k + u^k.u' = (k+1)u'u^k$.

Hérédité : supposons que, pour un certain entier k, P_k est vraie, c'est-à-dire :
u^k est dérivable sur I et $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.
Montrons alors que P_{k+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :
u^{k+1} est dérivable sur I et $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.
u^{k+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. $(u^{k+1} = u^k.u)$
$(u^{k+1})' = (u^k.u)' = (u^k)'.u + u^k.u' = ku'u^{k-1}.u + u^k.u' = ku'u^k + u^k.u' = (k+1)u'u^k$.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.