Cours de terminale S
Etudes de limites de suites

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2018-2019

Comportement d'une suite numérique

Par "étudier le comportement de la suite (u_n)", on sous-entend étudier les propriétés du nombre u_n lorsque l'entier n devient de plus en plus grand (variations, encadrement, comportement à l'infini $\ldots$).

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si ....

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si ....

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- bornée si . . . .

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- bornée si pour tout $n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemples

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;

  ....

  ....

  ....

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;

  pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;

  pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.

- Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$;

  ....

  ....

  ....

Exemples

- Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;
  pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.
  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.

- Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$;
  pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 0$.
  Cette suite est aussi minorée par 0 et par tout réel négatif ; en plus ici, 0 est le minimum de la suite atteint au rang 0.

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est ....

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ.

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ. c'est-à -dire que pour tout entier naturel n, ...

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ. c'est-à -dire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.

Démonstration (ROC)

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.

Démonstration (ROC)

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.
Supposons (par l'absurde) qu'il existe p tel que $u_p > L$.

Démonstration (ROC)

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.
Supposons (par l'absurde) qu'il existe p tel que $u_p > L$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ (1).

Démonstration (ROC)

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.
Supposons (par l'absurde) qu'il existe p tel que $u_p > L$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ (1).
Or $u_p > L > L - 1$, donc $I =]L - 1; u_p[$ est un intervalle ouvert contenant L.

Démonstration (ROC)

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.
Supposons (par l'absurde) qu'il existe p tel que $u_p > L$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ (1).
Or $u_p > L > L - 1$, donc $I =]L - 1; u_p[$ est un intervalle ouvert contenant L.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ;

Démonstration (ROC)

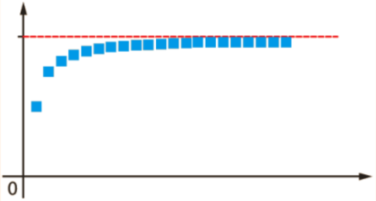
Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.
Supposons (par l'absurde) qu'il existe p tel que $u_p > L$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ (1).
Or $u_p > L > L - 1$, donc $I =]L - 1; u_p[$ est un intervalle ouvert contenant L.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui contredit (1).

Démonstration (ROC)

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L.
Supposons (par l'absurde) qu'il existe p tel que $u_p > L$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ (1).
Or $u_p > L > L - 1$, donc $I =]L - 1; u_p[$ est un intervalle ouvert contenant L.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui contredit (1).
Donc pour tout n : $u_n \leq L$.

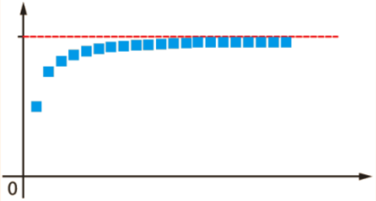
Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle ………



Théorème

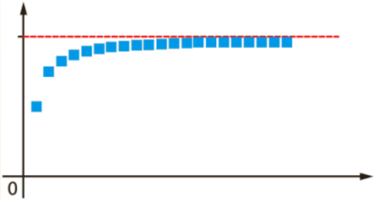
Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.



Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

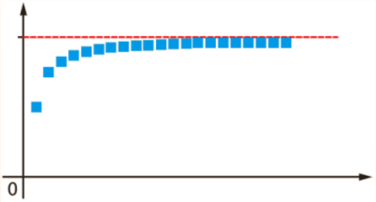
Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle ………



Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

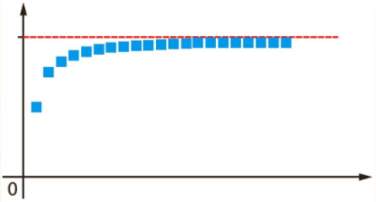
Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.



Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.



Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant, ou un minorant, de la suite.

Corollaire

Une suite croissante non majorée ....

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : . . . .

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$
d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$
d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (**ROC**) : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$
d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.