Cours de terminale S
Géométrie dans l'espace

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2020-2021

Définition

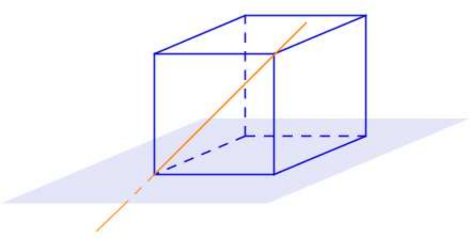
Une droite est dite _ _ _ _ _ _ _ à un plan si elle est incluse dans le plan ou si le plan et la droite n'ont aucun point en commun.

Définition

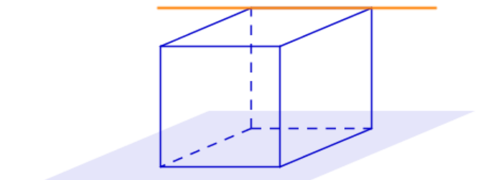
Une droite est dite **parallèle** à un plan si elle est incluse dans le plan ou si le plan et la droite n'ont aucun point en commun.

La droite peut donc être :

- sécantes au plan

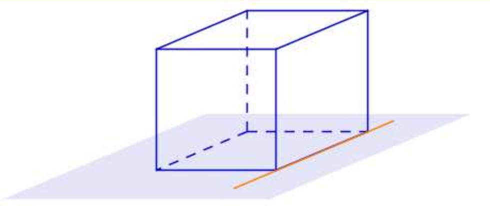


- strictement parallèle au plan



La droite peut donc être :

- incluse dans le plan



Définition

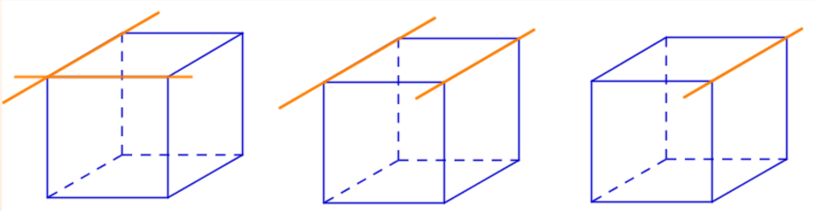
Deux droites sont dites _ _ _ _ _ _ si elles sont incluses dans un même plan.

Définition

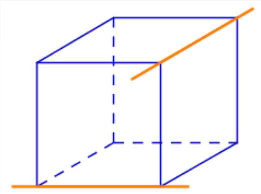
Deux droites sont dites **coplanaires** si elles sont incluses dans un même plan.

Deux droites peuvent donc être :

• Coplanaires : elles sont alors sécantes, strictement parallèles ou confondus.

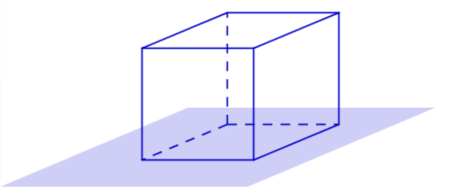


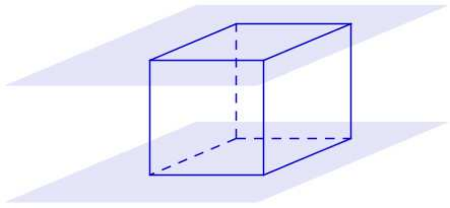
- Non coplanaires



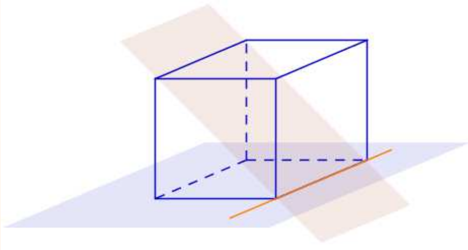
Deux plans peuvent être :

• **Parallèles** : Ils sont alors soit confondus, soit strictement parallèles



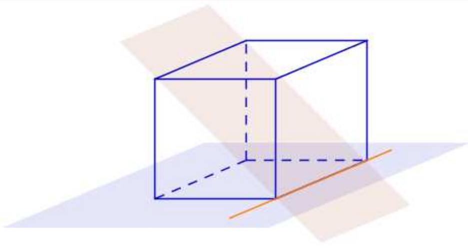


- **Sécants**



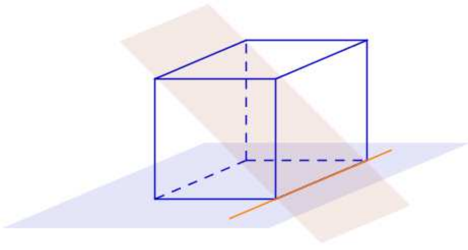
Propriété

Si deux plans sont sécants, leur intersection est une _ _ _ _ _ .

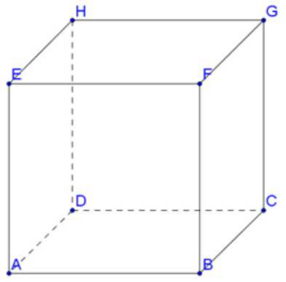


Propriété

Si deux plans sont sécants, leur intersection est une **droite**.

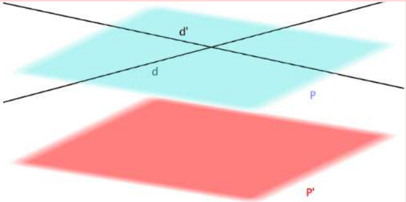


Exemple du cube



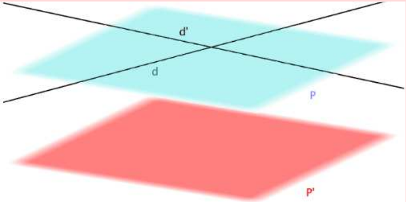
Propriété

Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont _ _ _ _ _ _.



Propriété

Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont parallèles.



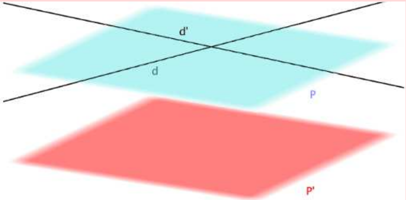
Remarque

Toutes les propriétés de géométrie plane

....

Propriété

Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont parallèles.

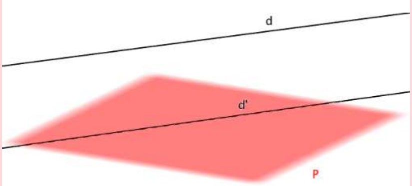


Remarque

Toutes les propriétés de géométrie plane restent valables dans un plan de l'espace

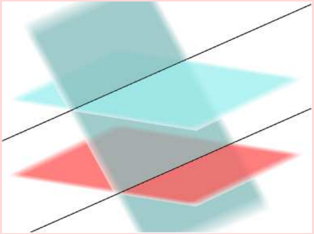
Propriété

Une droite d est parallèle à un plan P s'il existe une droite d' de P parallèle à d.



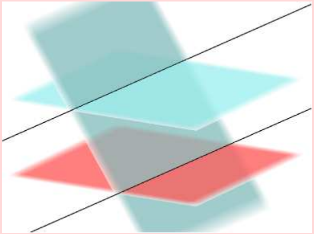
Propriété

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont _ _ _ _ _ _ .

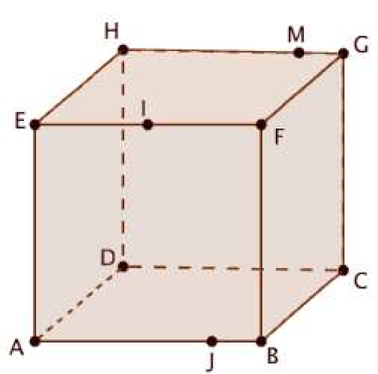


Propriété

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.



Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.



Théorème (du toit (preuve dans la suite du cours))

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.

On considère également deux droites d et d', telles que :

- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors

....

....

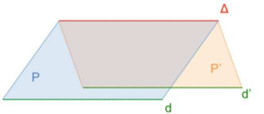
Théorème (du toit (preuve dans la suite du cours))

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.

On considère également deux droites d et d', telles que :

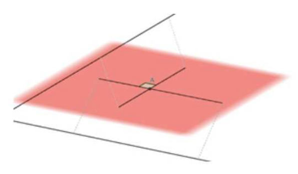
- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors les droites d et d' sont également parallèles à la droite Δ.



Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont ....

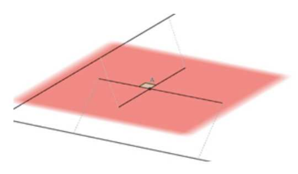


Propriété

Si deux droites sont parallèles, alors tout droite orthogonale à l'une est ....

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires

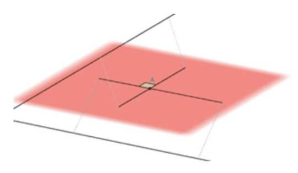


Propriété

Si deux droites sont parallèles, alors tout droite orthogonale à l'une est ....

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires

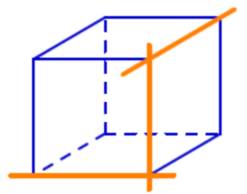


Propriété

Si deux droites sont parallèles, alors tout droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

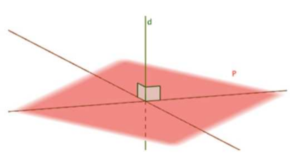
Remarque

Dans l'espace, si on considère deux droites orthogonales d_1 et d_2 et une troisième droite d_3 orthogonale à d_1 alors les droites d_2 et d_3 ne sont pas nécessairement parallèles (contrairement aux droites perpendiculaires du plan).



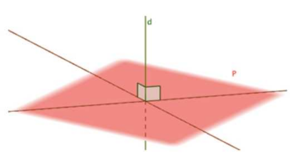
Définition

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à ......
....



Définition

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à toute droite de ce plan



Propriété

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à ....
....
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors ....
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont ....
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est ....
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont ....

Propriété

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à à deux droites sécantes de ce plan
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors ....
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont ....
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est ....
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont ....

Propriété

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à à deux droites sécantes de ce plan
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont ....
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est ....
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont ....

Propriété

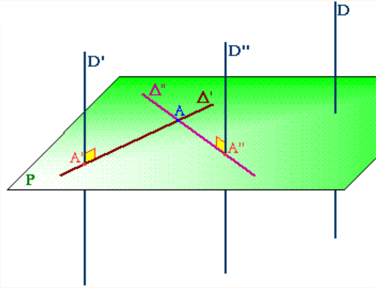
- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à à deux droites sécantes de ce plan
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est ....
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont ....

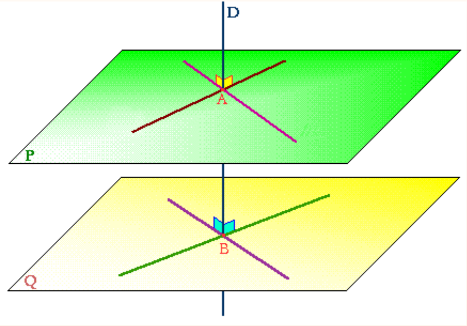
Propriété

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à à deux droites sécantes de ce plan
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont ....

Propriété

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à à deux droites sécantes de ce plan
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.


D
D'
D''
Δ''
Δ'
A
A'
A''
P


D
A
P
B
Q

Définition

Un vecteur de l'espace est défini par ....
....

Définition

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur)

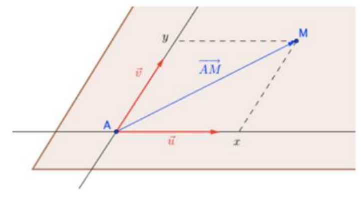
Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane ; relation de Chasles, colinéarité, etc . . . restent valides.

Définition

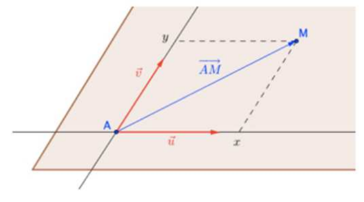
Soient A un point de l'espace, et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec x et y des réels, est . . . . . .

. . . .



Définition

Soient A un point de l'espace, et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec x et y des réels, est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$



Remarques

- Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un ....
- Un plan est ainsi totalement déterminé par ....
- Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont .... pour tous points A et B.

Remarques

- Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un un repère du plan.
- Un plan est ainsi totalement déterminé par
  ....
- Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont .... pour tous points A et B.

Remarques

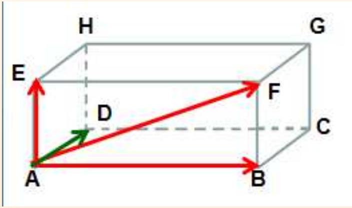
- Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un un repère du plan.
- Un plan est ainsi totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.
- Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont . . . . pour tous points A et B.

Remarques

- Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un un repère du plan.
- Un plan est ainsi totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.
- Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont parallèles pour tous points A et B.

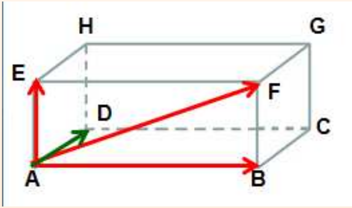
Définition

On dit que des vecteurs sont . . . . si et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.



Définition

On dit que des vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.



Propriété

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

  ....

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité .... implique ....

Propriété

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité .... implique ....

Propriété

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ implique ....

Propriété

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Remarques

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit en fait de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que .... pour montrer la coplanarité des trois vecteurs.
- Deux vecteurs sont toujours ....

Remarques

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit en fait de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ pour montrer la coplanarité des trois vecteurs.
- Deux vecteurs sont toujours ....

Remarques

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit en fait de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ pour montrer la coplanarité des trois vecteurs.
- Deux vecteurs sont toujours coplanaires

Théorème

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si ....

....

Propriété et définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$(x; y; z)$ sont les .... dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Théorème

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Propriété et définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$(x; y; z)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarque

3 points sont toujours coplanaires. il existe toujours un plan contenant 3 points.

Remarque

3 points sont toujours coplanaires. il existe toujours un plan contenant 3 points.

Il est important de comprendre l'analogie avec les chaises : Une chaise à 3 pieds n'est jamais bancale !

Remarque

3 points sont toujours coplanaires. il existe toujours un plan contenant 3 points.

Il est important de comprendre l'analogie avec les chaises : Une chaise à 3 pieds n'est jamais bancale !

Car les points qui touchent le sol sont toujours coplanaires.

Remarque

3 points sont toujours coplanaires. il existe toujours un plan contenant 3 points.

Il est important de comprendre l'analogie avec les chaises : Une chaise à 3 pieds n'est jamais bancale !

Car les points qui touchent le sol sont toujours coplanaires.

Mais une chaise à 4 pieds peut être bancale.

Remarque

3 points sont toujours coplanaires. il existe toujours un plan contenant 3 points.

Il est important de comprendre l'analogie avec les chaises : Une chaise à 3 pieds n'est jamais bancale !

Car les points qui touchent le sol sont toujours coplanaires.

Mais une chaise à 4 pieds peut être bancale.

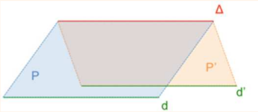
Car 4 points ne sont pas toujours coplanaires !

Rappel du théorème

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.

On considère également deux droites d et d', telles que :

- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.



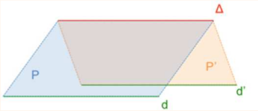
Alors . . . .

Rappel du théorème

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :

- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors les droites d et d' sont également parallèles à la droite Δ.



Démonstration

d et d' sont parallèles : on note $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et de d', et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.

On veut montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (et donc par suite, d et d' seront bien parallèles à Δ).

Notons $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P, et $(\vec{u}, \vec{v'})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P'. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont

....

Démonstration

d et d' sont parallèles : on note $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et de d', et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
On veut montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (et donc par suite, d et d' seront bien parallèles à Δ).
Notons $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P, et $(\vec{u}, \vec{v'})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P'. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont non coplanaires (puisque les plans P et P' sont sécants).

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont .... Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que

....

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont .... Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que ....

Ainsi, ... Donc

....

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément ....

Ainsi $\vec{w}=$......, et donc

....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que

....

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont .... Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que ....

Ainsi, ... Donc

....

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément ....

Ainsi $\vec{w}$=......, et donc

....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que $\overrightarrow{w} = x_1 \overrightarrow{u} + y_1 \overrightarrow{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont .... Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que ....
Ainsi, ... Donc
....
Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément ....
Ainsi $\vec{w}$=......, et donc
....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que
$\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que

. . . .
Ainsi, ... Donc
. . . .
Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément . . . .
Ainsi $\vec{w}$= . . . . . . , et donc
. . . .

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que $\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que $\vec{w} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v'}$

Ainsi, ... Donc ....

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément ....

Ainsi $\vec{w}$=......, et donc

....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que
$\overrightarrow{w} = x_1\overrightarrow{u} + y_1\overrightarrow{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que
$\overrightarrow{w} = x_2\overrightarrow{u} + y_2\overrightarrow{v'}$
Ainsi,$x_1\overrightarrow{u} + y_1\overrightarrow{v} = x_2\overrightarrow{u} + y_2\overrightarrow{v'}$ Donc

....

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément ....
Ainsi $\vec{w}$=......, et donc

....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que $\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que $\vec{w} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v'}$

Ainsi,$x_1\vec{u} + y_1\vec{v} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v'}$ Donc

$(x_1 - x_2)\vec{u} = y_2\vec{v'} - y_1\vec{v}$

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément ....

Ainsi $\vec{w}$=......, et donc

....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que $\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que $\vec{w} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v'}$

Ainsi,$x_1\vec{u} + y_1\vec{v} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v'}$ Donc $(x_1 - x_2)\vec{u} = y_2\vec{v'} - y_1\vec{v}$

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément $x_1 - x_2 = y_1 = y_2 = 0$

Ainsi $\vec{w}$=. . . . . . , et donc

. . . .

La droite Δ est contenue dans P, donc $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que
$\overrightarrow{w} = x_1\overrightarrow{u} + y_1\overrightarrow{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que
$\overrightarrow{w} = x_2\overrightarrow{u} + y_2\overrightarrow{v'}$
Ainsi,$x_1\overrightarrow{u} + y_1\overrightarrow{v} = x_2\overrightarrow{u} + y_2\overrightarrow{v'}$ Donc
$(x_1 - x_2)\overrightarrow{u} = y_2\overrightarrow{v'} - y_1\overrightarrow{v}$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément $x_1 - x_2 = y_1 = y_2 = 0$
Ainsi $\overrightarrow{w}$=$x_1\overrightarrow{u}$, et donc

....

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que
$\overrightarrow{w} = x_1 \overrightarrow{u} + y_1 \overrightarrow{v}$

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que
$\overrightarrow{w} = x_2 \overrightarrow{u} + y_2 \overrightarrow{v'}$
Ainsi,$x_1 \overrightarrow{u} + y_1 \overrightarrow{v} = x_2 \overrightarrow{u} + y_2 \overrightarrow{v'}$ Donc
$(x_1 - x_2)\overrightarrow{u} = y_2 \overrightarrow{v'} - y_1 \overrightarrow{v}$

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément $x_1 - x_2 = y_1 = y_2 = 0$
Ainsi $\vec{w}$=$x_1 \overrightarrow{u}$, et donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont bien colinéaires, ce qui prouve que d et d' sont bien parallèles à Δ

Définition

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x est l'................ du point M, y est l'................ du point M et z est la ....
On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

Définition

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x est l'abscisse du point M, y est l'................ du point M et z est la ....
On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

Définition

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x est l'abscisse du point M, y est l'ordonnée du point M et z est la . . . .
On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

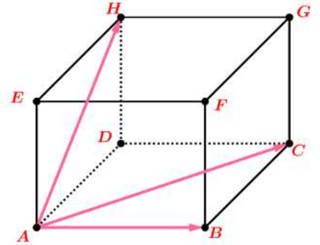
Définition

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x est l'abscisse du point M, y est l'ordonnée du point M et z est la côte
On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $|| \vec{i} || = || \vec{j} || = || \vec{k} || = 1$.

Un **repère** : c'est un point, appelé origine et 3 vecteurs non coplanaires, appelés la base du repère. Exemples :

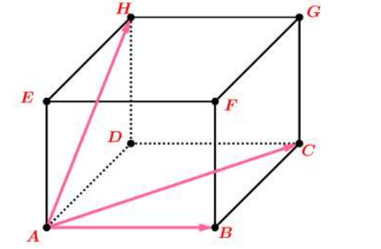
Un **repère** : c'est un point, appelé origine et 3 vecteurs non coplanaires, appelés la base du repère. Exemples :

$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH})$ est un repère de l'espace.

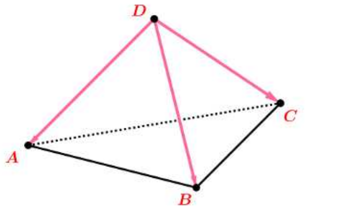


Un **repère** : c'est un point, appelé origine et 3 vecteurs non coplanaires, appelés la base du repère. Exemples :

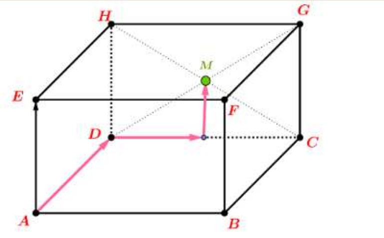
$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH})$ est un repère de l'espace.



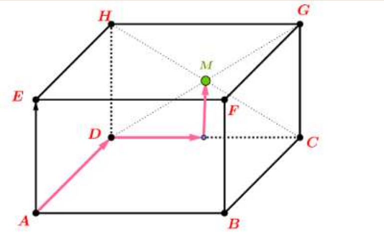
$(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC})$ est un repère de l'espace.



Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?

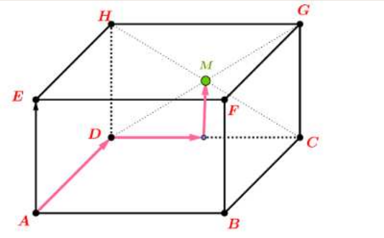


Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?



On essaye d'exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

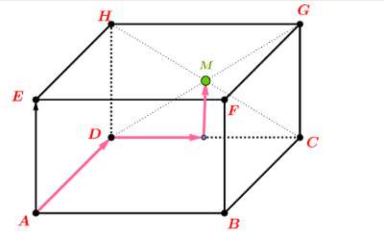
Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?



On essaye d'exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

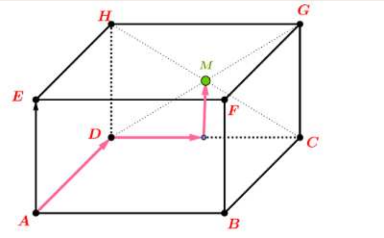
Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?



On essaye d'exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?



On essaye d'exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Donc M a pour coordonnées dans ce repère $(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$

Théorème

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que . . . . , c'est-à-dire tel que $\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$
- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées . . . .
. . . .
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que . . . .

Théorème

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$
- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ....
....
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que ....

Théorème

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} x' & = & kx \\ y' & = & ky \\ z' & = & kz \end{cases}$
- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées . . . .
. . . .
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que . . . .

Théorème

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= ky \\ z' &= kz \end{cases}$
- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que . . . .

Théorème

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$
- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Théorème

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : ....

Dans un repère orthonormé :

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est $|| \vec{u} || = \ldots\ldots\ldots$
- La distance AB est donnée par :

$$AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Dans un repère orthonormé :

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est $||\ \vec{u}\ || = \ldots\ldots\ldots.$
- La distance AB est donnée par :

$$AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Dans un repère orthonormé :

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est $||\ \vec{u}\ || = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- La distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\ (a; b; c)$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\ (a; b; c)$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at + x_A \\ y & = & bt + y_A \\ z & = & ct + z_A \end{array}\right.$$

Théorème

$M(x;y;z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\ (a;b;c)$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

Preuve

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\,(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\overrightarrow{u}\,(a; b; c)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que .... , ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Preuve

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\,(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\overrightarrow{u}\,(a; b; c)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Preuve

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ (x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\overrightarrow{u}\ (a; b; c)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

Définition

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & at + x_A \\ y & = & bt + y_A \\ z & = & ct + z_A \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}, \text{ est appelé}$$
....

Remarques

- Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend ....
  ....
- Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de
  ....

Définition

$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est appelé représentation paramétrique de la droite Δ.

Remarques

- Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend ....
  ....
- Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de
  ....

Définition

$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est appelé représentation paramétrique de la droite Δ.

Remarques

- Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend du choix du point A et du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$
- Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de ....

Définition

$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est appelé représentation paramétrique de la droite Δ.

Remarques

- Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend du choix du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$
- Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de la demi-droite d'origine A et de même sens que $\vec{u}$

Théorème

$M(x;y;z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ $(a;b;c)$ et $\vec{v}$ $(a';b';c')$ si et seulement si il existe un couple de réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ $(a; b; c)$ et $\vec{v}$ $(a'; b'; c')$ si et seulement si il existe un couple de réels t et t' tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at + a't' + x_A \\ y & = & bt + b't' + y_A \\ z & = & ct + c't' + z_A \end{array}\right.$$

Définition

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at + a't' + x_A \\ y & = & bt + b't' + y_A \\ z & = & ct + c't' + z_A \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}, \text{ est appelé}$$
. . . .

Remarque

Il existe plusieurs représentations paramétriques pour un même plan : chaque représentation dépend . . . .
. . . .

Définition

$\left\{\begin{array}{lll} x & = & at+a't'+x_A \\ y & = & bt+b't'+y_A \\ z & = & ct+c't'+z_A \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$, est appelé représentation paramétrique du plan P.

Remarque

Il existe plusieurs représentations paramétriques pour un même plan : chaque représentation dépend ....
....

Définition

$\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$, est appelé représentation paramétrique du plan P.

Remarque

Il existe plusieurs représentations paramétriques pour un même plan : chaque représentation dépend du choix du point A et des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$