

Chapitre 15 : Géométrie dans l'espace

1 Positions relatives de droites et de plans

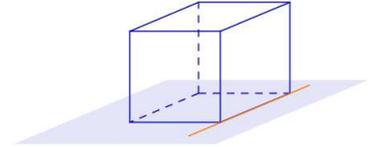
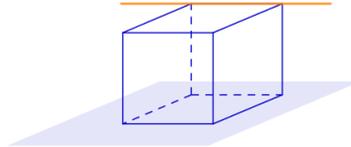
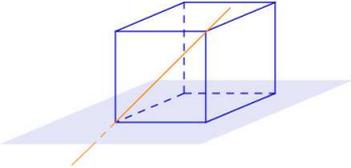
1.1 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite est dite _____ à un plan si elle est incluse dans le plan ou si le plan et la droite n'ont aucun point en commun.

La droite peut donc être :

- sécantes au plan
- strictement parallèle au plan
- incluse dans le plan



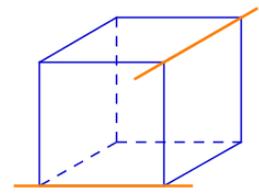
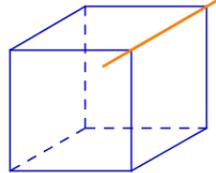
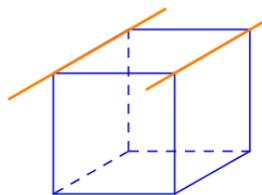
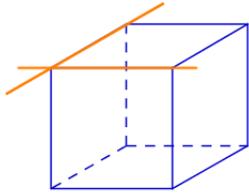
1.2 Positions relatives de deux droites

Définition

Deux droites sont dites _____ si elles sont incluses dans un même plan.

Deux droites peuvent donc être :

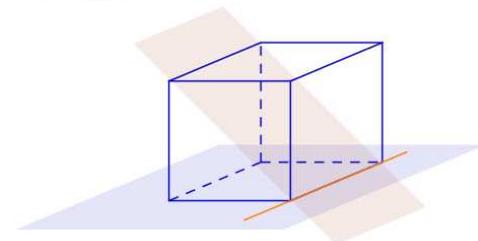
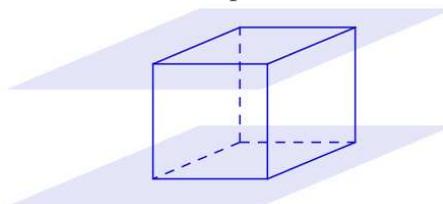
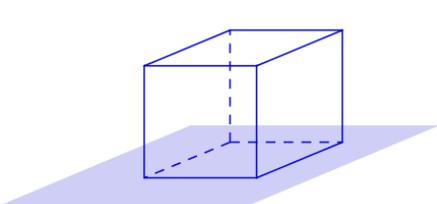
- Coplanaires : elles sont alors sécantes, strictement parallèles ou confondues.
- Non coplanaires



1.3 Positions relatives de deux plans

Deux plans peuvent être :

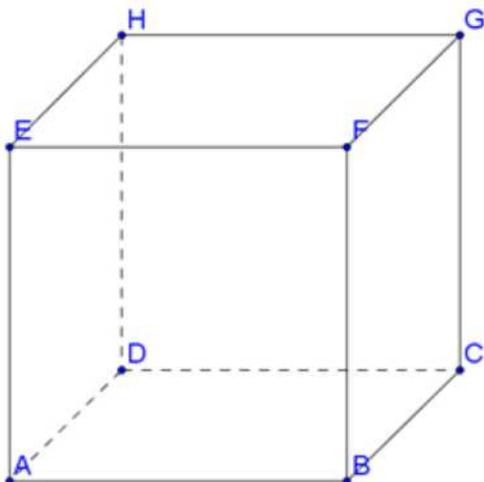
- Parallèles : Ils sont alors soit confondus, soit strictement parallèles
- Sécants



Propriété

Si deux plans sont sécants, leur intersection est une _____

Exemple du cube

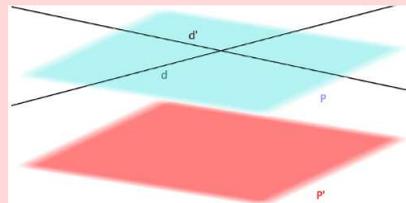


2 Parallélisme

2.1 Entre plans

Propriété

Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont



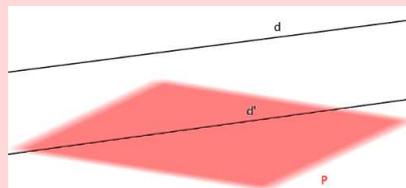
Remarque

Toutes les propriétés de géométrie plane

2.2 Entre droites et plans

Propriété

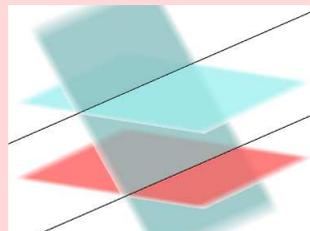
Une droite d est parallèle à un plan P s'il existe une droite d' de P parallèle à d .



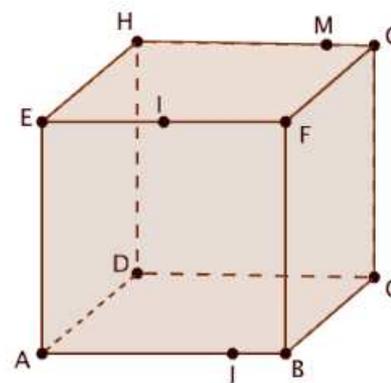
2.3 Entre droites

Propriété

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont



Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.



Théorème (du toit (preuve dans la suite du cours))

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ .

On considère également deux droites d et d' , telles que :

- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors

.....

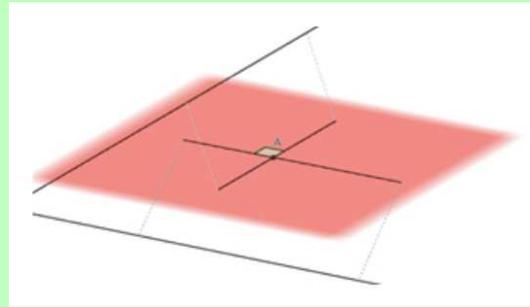


3 Orthogonalité

3.1 Orthogonalité de droites

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont

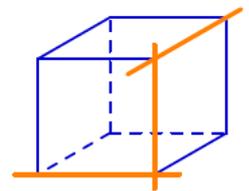


Propriété

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est

Remarque

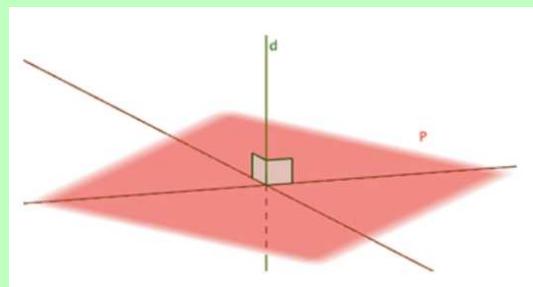
Dans l'espace, si on considère deux droites orthogonales d_1 et d_2 et une troisième droite d_3 orthogonale à d_1 alors les droites d_2 et d_3 ne sont pas nécessairement parallèles (contrairement aux droites perpendiculaires du plan).



3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

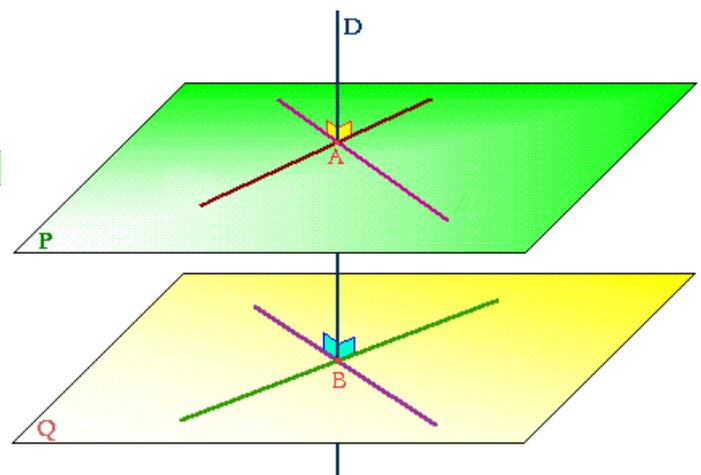
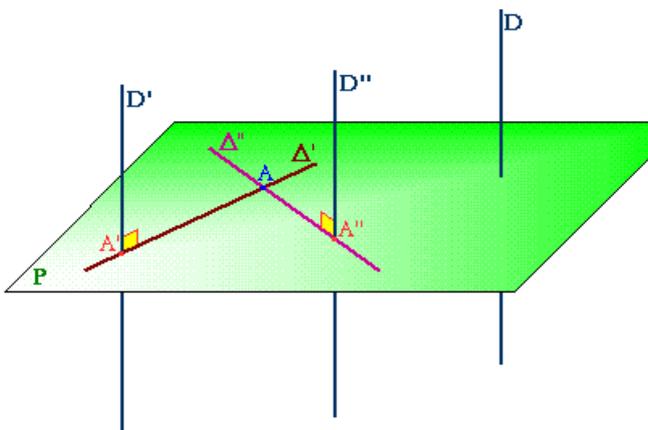
Définition

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à



Propriété

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont



4 Géométrie vectorielle dans l'espace

4.1 Notion de vecteur dans l'espace

Définition

Un vecteur de l'espace est défini par

Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane ; relation de Chasles, colinéarité, etc ... restent valides.

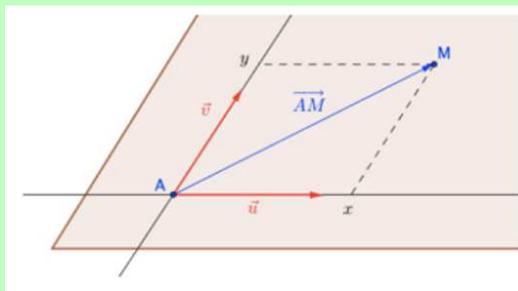
4.2 Caractérisation d'un plan

Définition

Soient A un point de l'espace, et deux vecteurs de l'espace \vec{u} et \vec{v} non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec x et y des réels, est ...

.....



Remarques

- Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un
- Un plan est ainsi totalement déterminé par
- Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont pour tous points A et B .

4.3 Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que des vecteurs sont si et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A .

Propriété

- Trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

.....

- Trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité implique

Remarques

- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, il suffit en fait de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour montrer la coplanarité des trois vecteurs.
- Deux vecteurs sont

Théorème

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si

Propriété et définition

Soit \vec{u} un vecteur de l'espace et \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires.

Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x; y; z)$ sont les dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4.4 Application : démonstration du théorème du toit

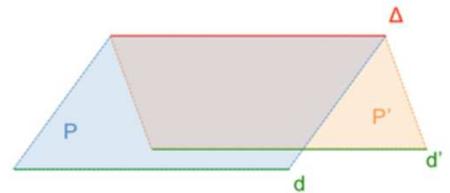
Rappel du théorème

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ .

On considère également deux droites d et d' , telles que :

- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors



Démonstration

d et d' sont parallèles : on note \vec{u} un vecteur directeur de d et de d' , et \vec{w} un vecteur directeur de Δ .

On veut montrer que \vec{u} et \vec{w} sont colinéaires (et donc par suite, d et d' seront bien parallèles à Δ).

Notons (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs directeurs du plan P , et (\vec{u}, \vec{v}') un couple de vecteurs directeurs du plan P' . Les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{v}' sont

La droite Δ est contenue dans P , donc \vec{w}, \vec{u} et \vec{v} sont Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que

De même, la droite Δ est contenue dans P' , donc \vec{w}, \vec{u} et \vec{v}' sont Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que

Ainsi, Donc

Comme les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{v}' ne sont pas coplanaires, on a forcément

Ainsi $\vec{w} = \dots$, et donc

5 Repérage dans l'espace

5.1 Repères de l'espace

Définition

Si \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x est l'..... du point M , y est l'..... du point M et z est la

On dit que le repère est orthonormé si \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

5.2 Colinéarité et alignement dans l'espace

Théorème

- Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que

c'est-à-dire tel que
$$\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées

- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que

5.3 Milieu, distance

Théorème

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

Dans un repère orthonormé :

- La norme du vecteur \vec{u} est $\|\vec{u}\| = \dots$

- La distance AB est donnée par : $AB = \dots$

6 Représentations paramétriques

6.1 Représentations paramétriques d'une droite

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u} (a; b; c)$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = \dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots \\ z = \dots\dots\dots \end{cases}$$

Preuve

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AM} (x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\vec{u} (a; b; c)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que , ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Définition

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ est appelé } \dots\dots\dots$$

Remarques

- Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend
- Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors \vec{AM} et \vec{u} sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de

6.2 Représentations paramétriques d'un plan

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u} (a; b; c)$ et $\vec{v} (a'; b'; c')$ si et seulement si il existe un couple de réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = \dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots \\ z = \dots\dots\dots \end{cases}$$

Définition

$$\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}, \text{ est appelé } \dots\dots\dots$$

Remarque

Il existe plusieurs représentations paramétriques pour un même plan : chaque représentation dépend