Correction DS 6

Mathématiques Term S

2018-2019

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Soit $I = \left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
  - $\ln(6x-2)$ n'existe que si $6x-2>0$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{3}$; donc $\ln(6x-2)$ existe si $x \in I$.

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Soit $I = \left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
  - $\ln(6x-2)$ n'existe que si $6x-2>0$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{3}$; donc $\ln(6x-2)$ existe si $x \in I$.
  - $\ln(2x-1)$ n'existe que si $2x-1>0$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{2}$; donc $\ln(2x-1)$ existe si $x \in I$.

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

- Soit $I = \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
  - $\ln(6x-2)$ n'existe que si $6x-2>0$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{3}$; donc $\ln(6x-2)$ existe si $x \in I$.
  - $\ln(2x-1)$ n'existe que si $2x-1>0$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{2}$; donc $\ln(2x-1)$ existe si $x \in I$.
  - $\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$; donc $\ln(x)$ existe si $x \in I$.

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x)$

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x$

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.

  $\Delta=11^2-4\times12\times2=25=5^2$;

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.
  $\Delta=11^2-4\times12\times2=25=5^2$; $x'=\dfrac{11+5}{2\times12}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.
  $\Delta=11^2-4\times12\times2=25=5^2$; $x'=\dfrac{11+5}{2\times12}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$
  et $x''=\dfrac{11-5}{24}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.
  $\Delta=11^2-4\times12\times2=25=5^2$; $x'=\dfrac{11+5}{2\times12}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$
  et $x''=\dfrac{11-5}{24}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$
  $x'\in I$ et $x''\notin I$ donc l'équation du départ n'admet qu'une solution dans l'intervalle I.

Affirmation 1 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff$
  $\ln\left((6x-2)(2x-1)\right)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.
  $\Delta=11^2-4\times12\times2=25=5^2$; $x'=\dfrac{11+5}{2\times12}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$
  et $x''=\dfrac{11-5}{24}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$
  $x'\in I$ et $x''\notin I$ donc l'équation du départ n'admet qu'une solution dans l'intervalle I.

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

- Les solutions de l'équation $\left(4z^2 - 20z + 37\right)\left(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,\right) = 0$ sont les solutions des deux équations $4z^2 - 20z + 37 = 0$ et $2z - 7 + 2\,\mathrm{i} = 0$.

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

- Les solutions de l'équation $\left(4z^2 - 20z + 37\right)\left(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,\right) = 0$ sont les solutions des deux équations $4z^2 - 20z + 37 = 0$ et $2z - 7 + 2\,\mathrm{i} \; = 0$.
- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 20z + 37 = 0$.

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\mathrm{i}) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

- Les solutions de l'équation $\left(4z^2 - 20z + 37\right)\left(2z - 7 + 2\mathrm{i}\right) = 0$ sont les solutions des deux équations $4z^2 - 20z + 37 = 0$ et $2z - 7 + 2\mathrm{i} = 0$.
- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 20z + 37 = 0$.
  $\Delta = 20^2 - 4 \times 4 \times 37 = -192 < 0$; l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

- Les solutions de l'équation $\left(4z^2 - 20z + 37\right)\left(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,\right) = 0$ sont les solutions des deux équations $4z^2 - 20z + 37 = 0$ et $2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\; = 0$.
- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 20z + 37 = 0$.
  $\Delta = 20^2 - 4 \times 4 \times 37 = -192 < 0$; l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
  $$z_1 = \frac{20 + \mathrm{i}\sqrt{192}}{2 \times 4} = \frac{20 + 8\,\mathrm{i}\sqrt{3}}{8} = \frac{5}{2} + \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et}$$
  $$z_2 = \frac{5}{2} - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\, = 0$:
  $2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\, = 0 \iff 2z = 7 - 2\,\mathrm{i}\, \iff z = \dfrac{7}{2} - \mathrm{i}$

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\, = 0$:
  $2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\, = 0 \iff 2z = 7 - 2\,\mathrm{i}\, \iff z = \dfrac{7}{2} - \mathrm{i}$
  Cette équation a pour solution le nombre complexe $z_3 = \dfrac{7}{2} - \mathrm{i}\,.$

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

- $\mathrm{PA} = |z_1 - z_\mathrm{P}| = \left|\frac{5}{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{3} - 2\right| = \left|\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{3}\right| = \sqrt{\frac{13}{4}}$

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

- $\mathrm{PA} = |z_1 - z_\mathrm{P}| = \left|\frac{5}{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{3} - 2\right| = \left|\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\sqrt{3}\right| = \sqrt{\frac{13}{4}}$
- $\mathrm{PB} = |z_2 - z_\mathrm{P}| = \left|\frac{5}{2} - \mathrm{i}\,\sqrt{3} - 2\right| = \left|\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\sqrt{3}\right| = \sqrt{\frac{13}{4}}$

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2-20z+37)(2z-7+2\,\mathrm{i}\,)=0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

- $\mathrm{PA}=\left|z_1-z_\mathrm{P}\right|=\left|\dfrac{5}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}-2\right|=\left|\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{\dfrac{13}{4}}$
- $\mathrm{PB}=\left|z_2-z_\mathrm{P}\right|=\left|\dfrac{5}{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}-2\right|=\left|\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{\dfrac{13}{4}}$
- $\mathrm{PC}=\left|z_3-z_\mathrm{P}\right|=\left|\dfrac{7}{2}-\mathrm{i}-2\right|=\left|\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\right|=\sqrt{\dfrac{13}{4}}$

Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0$ sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

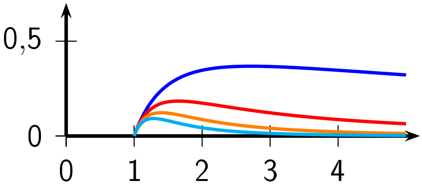
- $\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \mathrm{PC}$ donc les solutions de l'équation sont les affixes de trois points situés sur le cercle de centre P d'affixe 2 et de rayon $\dfrac{13}{4}$.

L'affirmation 2 est vraie.

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$f_n =$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$$f_n = \frac{u}{v} \Longrightarrow f_n' =$$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$f_n = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1 ; 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$f_n = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$f_n = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$$

donc $\forall x \in [1;5]$, $f_n'(x) =$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$f_n = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$$

donc $\forall x \in [1;5]$, $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}} =$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\,;\,5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$f_n = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$$

donc $\forall x \in [1;5]$, $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}} =$
$\dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln(x))}{x^{2n}} =$

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1;5]$

$f_n = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$$

donc $\forall x \in [1;5]$, $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}} =$
$\dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln(x))}{x^{2n}} = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}} \ln(x).$$

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$

$$f_n'(x) = 0 \iff$$

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln(x)$

$$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{n} \iff$$

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{e}\ln(x)$

$$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{n} \iff x = \exp\frac{1}{n} \text{ et}$$

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln(x)$

$$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{n} \iff x = \exp\frac{1}{n} \text{ et}$$

$$f_n\left(\exp\frac{1}{n}\right) =$$

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{e}\ln(x)$

$$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{n} \iff x = \exp\frac{1}{n} \text{ et}$$

$$f_n\left(\exp\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(\exp\frac{1}{n}\right)}{\exp 1} =$$

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$

$$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{n} \iff x = \exp\frac{1}{n} \text{ et}$$

$$f_n\left(\exp\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(\exp\frac{1}{n}\right)}{\exp 1} = \frac{1}{e}\ln\left(\exp\frac{1}{n}\right)$$

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$

$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{n} \iff x = \exp\dfrac{1}{n}$ et

$f_n\left(\exp\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(\exp\frac{1}{n}\right)}{\exp 1} = \dfrac{1}{e}\ln\left(\exp\dfrac{1}{n}\right)$ A_n est donc de coordonnées $\left(\exp\dfrac{1}{n}\ ;\ \dfrac{1}{e}\ln\left(\exp\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Donc tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

2. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$

$f_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{n} \iff x = \exp\dfrac{1}{n}$ et $f_n\left(\exp\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(\exp\frac{1}{n}\right)}{\exp 1} = \dfrac{1}{e}\ln\left(\exp\dfrac{1}{n}\right)$ A_n est donc de coordonnées $\left(\exp\dfrac{1}{n}\ ;\ \dfrac{1}{e}\ln\left(\exp\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Donc tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

3. a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

$1 \leqslant x \leqslant 5 \Longrightarrow 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$ car $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur $[1\,;\,5]$

3. a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

$1 \leqslant x \leqslant 5 \Longrightarrow 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$ car $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur $[1\ ;\ 5]$
en divisant membre à membre par $x^n > 0$, on obtient bien pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

3. a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

$1 \leqslant x \leqslant 5 \Longrightarrow 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$ car $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur $[1\ ;\ 5]$
en divisant membre à membre par $x^n > 0$, on obtient bien pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

3. b) $\forall n > 1 : \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$

3. b) $\forall n > 1 : \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

Pour tout entier $n > 1$, $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 x^{-n}\,\mathrm{d}x$

3. b) $\forall n > 1 : \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

Pour tout entier $n > 1$,
$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x &= \int_1^5 x^{-n}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{-n+1}\left[x^{-n+1}\right]_1^5\end{aligned}$$

3. b) $\forall n > 1 : \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

Pour tout entier $n > 1$, $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 x^{-n}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{-n+1}\left[x^{-n+1}\right]_1^5$$

$$= \frac{1}{-n+1}\left(5^{-n+1} - 1\right)$$

3. b) $\forall n > 1 : \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$

Pour tout entier $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx &= \int_1^5 x^{-n}\,dx \\
&= \frac{1}{-n+1}\left[x^{-n+1}\right]_1^5 \\
&= \frac{1}{-n+1}\left(5^{-n+1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

3. c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$.

Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

3. c)

$f_n(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ 5]$ donc l'aire cherchée est donnée par $\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

3. c)

$f_n(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ 5]$ donc l'aire cherchée est donnée par
$$\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
on sait que pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1 ;5] :

3. c)

$f_n(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ 5]$ donc l'aire cherchée est donnée par
$\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\ \mathrm{d}x$
on sait que pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1 ;5] :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

3. c)

$f_n(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ 5]$ donc l'aire cherchée est donnée par
$\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\ \mathrm{d}x$
on sait que pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1 ;5] :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

or l'intégrale conserve l'ordre donc
$0 \leqslant \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\ \mathrm{d}x$

3. c)

$$\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x = \ln(5)\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(5)}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

3. c)

$$\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x = \ln(5)\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(5)}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ car 5>1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(5)}{n-1}$ =0 donc par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ =0

3. c)

$$\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,dx = \ln(5)\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{\ln(5)}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ car 5>1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(5)}{n-1}$ =0 donc par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,dx$ =0

D'après le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,dx$ =0

3. c)

$$\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x = \ln(5)\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(5)}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ car $5>1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(5)}{n-1} =0$ donc par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x =0$

D'après le théorème des gendarmes on en déduit que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x =0$

la limite de l'aire est donc de 0 quand n tend vers $+\infty$