Correction DS 2

Mathématiques Term S

2018-2019

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B)$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Donc $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (ROC)

A et B indépendants, donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Donc $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E).

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :
$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

En comparant les termes de plus haut degré on en déduit que

$a=$

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :
$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.
En comparant les termes de plus haut degré on en déduit que $a=1$; en comparant les termes constants on trouve que
$c=$

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

En comparant les termes de plus haut degré on en déduit que $a=1$; en comparant les termes constants on trouve que $c=8$. On a donc :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(z^2+bz+8\right)$.

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

En comparant les termes de plus haut degré on en déduit que $a=1$; en comparant les termes constants on trouve que $c=8$. On a donc :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(z^2+bz+8\right)$.

En comparant les termes en z^2, on obtient :

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

En comparant les termes de plus haut degré on en déduit que $a=1$; en comparant les termes constants on trouve que $c=8$. On a donc :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(z^2+bz+8\right)$.

En comparant les termes en z^2, on obtient :

$2=b-2 \iff b=4$.

On a donc : $z^3+2z^2-16=$

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

On a : $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ qui signifie que 2 est solution de (E). Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

En comparant les termes de plus haut degré on en déduit que $a=1$; en comparant les termes constants on trouve que $c=8$. On a donc :

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(z^2+bz+8\right)$.

En comparant les termes en z^2, on obtient :

$2=b-2 \iff b=4$.

On a donc : $z^3+2z^2-16=(z-2)\left(z^2+4z+8\right)$.

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique.

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff$$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta =$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 =$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 8 = \; -16 =$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 8 = -16 = (4i)^2.$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 = (4i)^2.$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 =$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 8 = -16 = (4i)^2.$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i \text{ et } z_2 =$$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 8 = -16 = (4i)^2.$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i \text{ et } z_2 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i$$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique. On a donc

$(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+4z+8=0.$

On retrouve la solution 2 ; d'autre part :

Résolvons l'équation : $z^2+4z+8=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 8 = \; -16 = (4i)^2.$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i \;\text{ et }\; z_2 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i$$

Dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E) sont donc :
$\{2 \quad ; \quad -2-2\mathrm{i} \quad ; \quad -2+2\mathrm{i}\}.$

Placer les points A, B et D d'affixes respectives

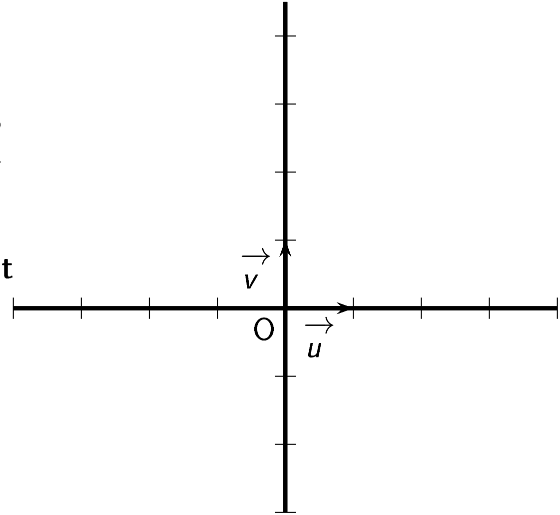
$$z_{\mathsf{A}} = -2-2\mathbf{i},\ z_{\mathsf{B}} = 2 \quad \text{et}$$

$$z_{\mathsf{D}} = -2+2\mathbf{i}.$$

Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$z_{\mathbf{A}} = -2-2\mathbf{i}$, $z_{\mathbf{B}} = 2$ et

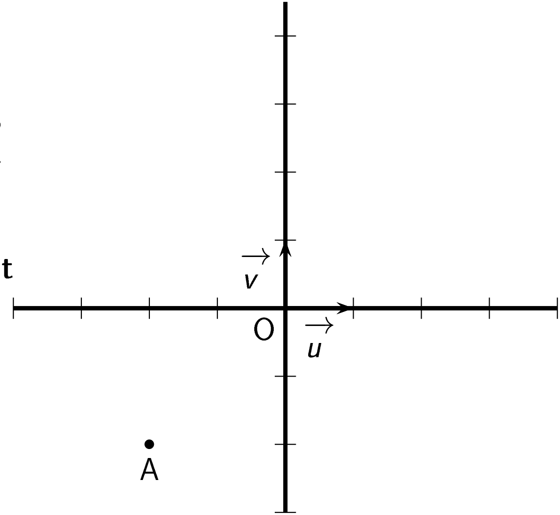
$$z_{\mathbf{D}} = -2+2\mathbf{i}.$$



Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$z_A = -2-2\mathbf{i}$, $z_B = 2$ et

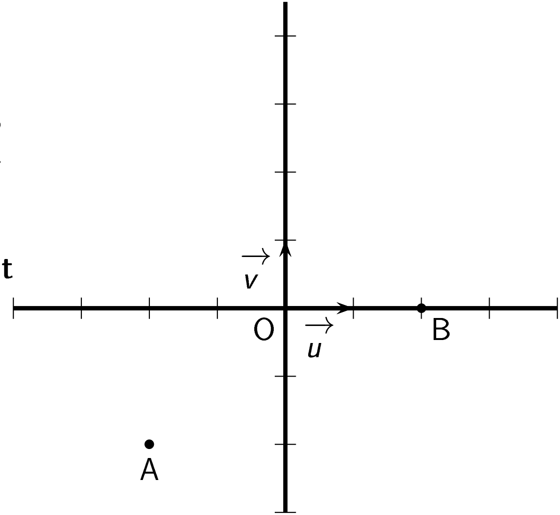
$$z_D = -2+2\mathbf{i}.$$



Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$z_A = -2-2\mathbf{i}$, $z_B = 2$ et

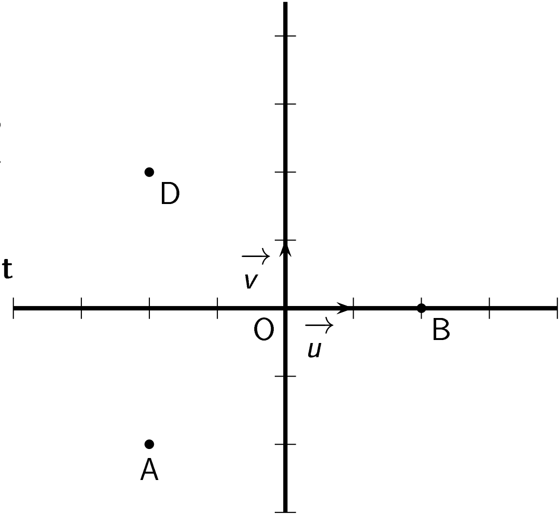
$z_D = -2+2\mathbf{i}$.



Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$z_A = -2-2\mathbf{i}$, $z_B = 2$ et

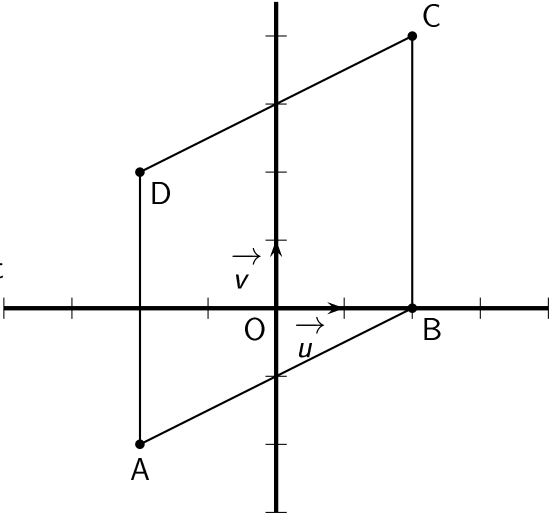
$$z_D = -2 + 2\mathbf{i}.$$



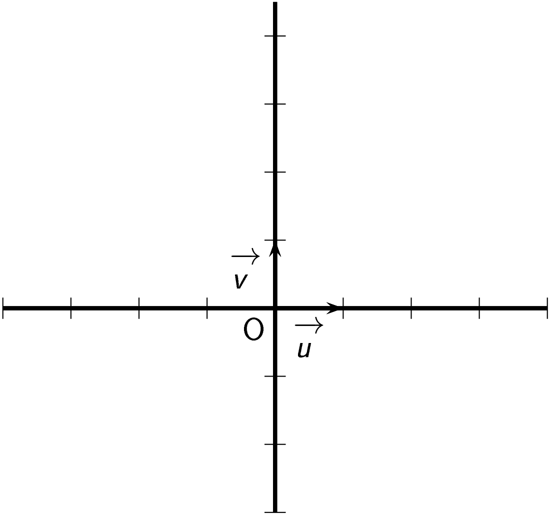
Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$z_A = -2-2\mathbf{i}$, $z_B = 2$ et

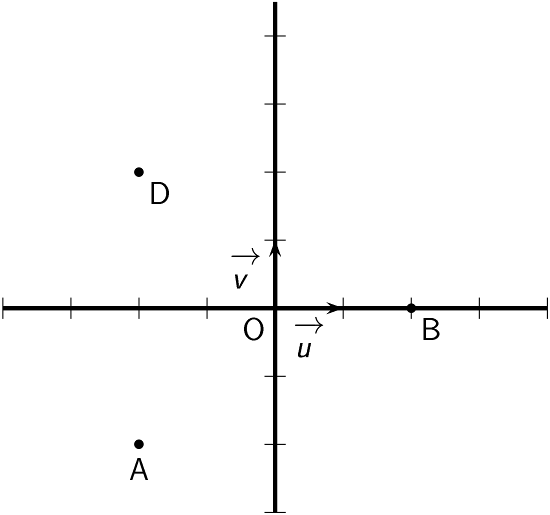
$z_D = -2 + 2\mathbf{i}$.



Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

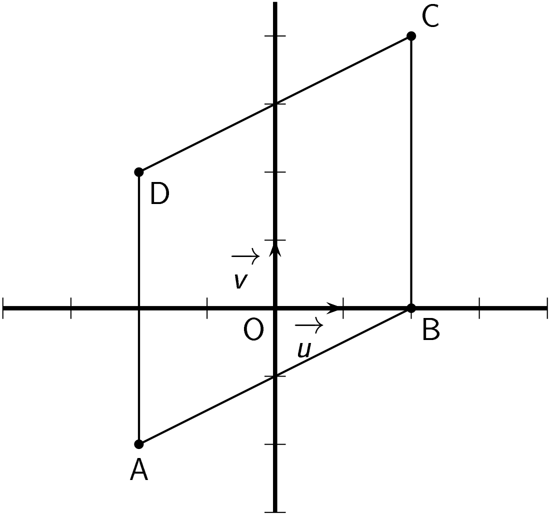


Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.



Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

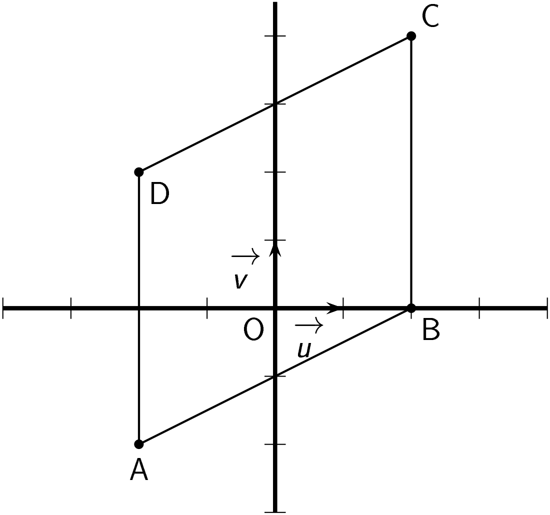
ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff$



Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

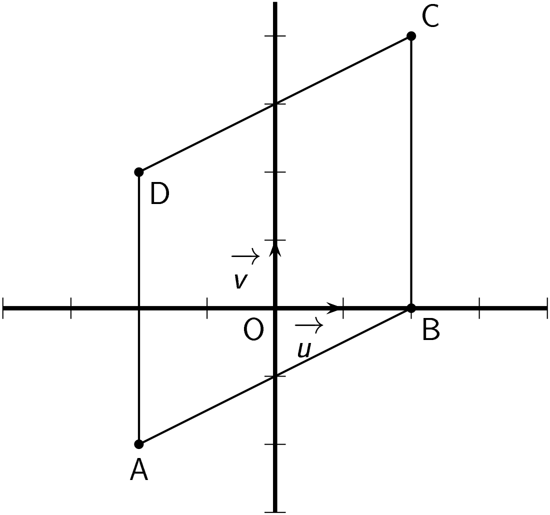
ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff$

$z_B - z_A = z_C - z_D \iff$



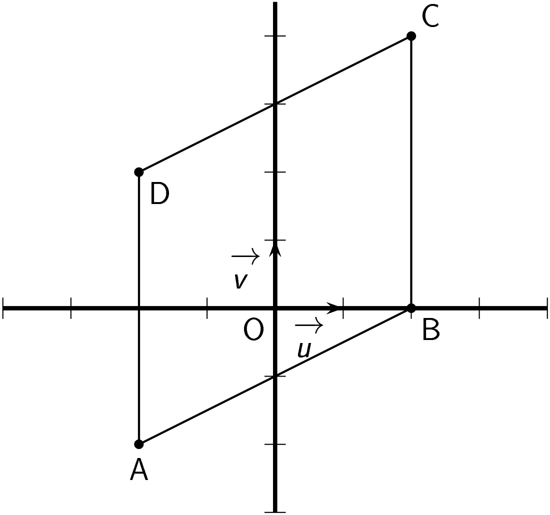
Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff$ $z_B - z_A = z_C - z_D \iff$ $z_C = z_B - z_A + z_D =$



Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff z_B - z_A = z_C - z_D \iff z_C = z_B - z_A + z_D = 2-(-2-2i)+(-2+2i) = 2+4i$.



On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$v_n =$

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} =$$

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} =$$

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2^n \times 2}\frac{2^n}{n^2} =$$

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2^n \times 2} \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}.$$

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2^n \times 2} \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}.$$

Or $\dfrac{n+1}{n} =$

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2^n \times 2}\frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}.$$

Or $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$,

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2^n \times 2} \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}.$$

Or $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2^n \times 2}\frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}.$$

Or $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = 1$.

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

$$v_n = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2^n \times 2}\frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}.$$

Or $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = 1$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 0,\ v_n > \dfrac{1}{2}$

Rappel : $v_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$

Rappel : $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

Pour tout naturel n > 0,

$n + 1 > n$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$

Rappel : $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

Pour tout naturel n > 0,

$n + 1 > n$

d'où $\frac{n+1}{n} > 1$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 0,\ v_n > \dfrac{1}{2}$

Rappel : $v_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$

Pour tout naturel n > 0,

$n + 1 > n$

d'où $\dfrac{n+1}{n} > 1$

Ainsi : $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 > 1$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \dfrac{1}{2}$

Rappel : $v_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$

Pour tout naturel n > 0,

$n + 1 > n$

d'où $\dfrac{n+1}{n} > 1$

Ainsi : $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 > 1$

Par conséquent : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N,\ \ v_n < \dfrac{3}{4}$.

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N,\ v_n < \dfrac{3}{4}$.

$v_n < \dfrac{3}{4} \iff$

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N, \ v_n < \dfrac{3}{4}$.

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \iff$$

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N,\ v_n < \dfrac{3}{4}$.

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N, \; v_n < \dfrac{3}{4}$.

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff$$

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N,\ v_n < \dfrac{3}{4}$.

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff n+1 < \sqrt{\frac{3}{2}}n \iff$$

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N,\ v_n < \dfrac{3}{4}$.

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff n+1 < \sqrt{\frac{3}{2}}n \iff n\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) >$$

$$1 \iff$$

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N,\ v_n < \dfrac{3}{4}$.

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{n+1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff n+1 < \sqrt{\frac{3}{2}}n \iff n\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) > 1 \iff n > \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \approx$$

c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N, \ v_n < \dfrac{3}{4}$.

$v_n < \dfrac{3}{4} \iff \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} \iff \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 < \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{n+1}{n} < \sqrt{\dfrac{3}{2}} \iff n+1 < \sqrt{\dfrac{3}{2}}n \iff n\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1\right) > 1 \iff n > \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \approx 4,44$. Il faut prendre $N = 5$.

d) En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$.

d) En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

On vient de démontrer que pour $n \geq 5$, alors

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$$

d) En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

On vient de démontrer que pour $n \geq 5$, alors

$$v_n < \frac{3}{4} \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4} \iff u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n.$$

On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_n$.
a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

- *Initialisation*

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \dfrac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \dfrac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \dfrac{3}{4} u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

On a $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \dfrac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

On a $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \dfrac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

On a $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou encore

$$u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$$

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \frac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

On a $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou encore

$u_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$ soit enfin $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$.

L'hérédité est démontrée.

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \dfrac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

On a $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou encore

$u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$ soit enfin $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$.

L'hérédité est démontrée.

La propriété est vraie au rang 5 et si elle est vraie à un rang quelconque supérieur ou égal à 5, elle est vraie au rang suivant.

- *Initialisation*

Pour $n = 5$, on a $u_5 < \frac{3}{4}u_5$. La relation est vraie au rang 5.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ on ait $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

On a $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou encore $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$ soit enfin $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$.

L'hérédité est démontrée.

La propriété est vraie au rang 5 et si elle est vraie à un rang quelconque supérieur ou égal à 5, elle est vraie au rang suivant.

- *Conclusion :* par le principe de la récurrence, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5 .$$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5 .$$

On a $u_5 \leqslant u_5,\ u_6 \leqslant \dfrac{3}{4} u_5, \ldots, u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 .$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5 .$$

On a $u_5 \leqslant u_5,\ u_6 \leqslant \frac{3}{4}u_5, \ldots, u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 .$

En sommant toutes ces inégalités on obtient :

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5 .$$

On a $u_5 \leqslant u_5$, $u_6 \leqslant \frac{3}{4}u_5, \dots, u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

En sommant toutes ces inégalités on obtient :

$S_n \leqslant u_5 + \frac{3}{4}u_5 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou après factorisation :

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5 .$$

On a $u_5 \leqslant u_5$, $u_6 \leqslant \frac{3}{4} u_5, \ldots, u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

En sommant toutes ces inégalités on obtient :

$S_n \leqslant u_5 + \frac{3}{4} u_5 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ou après factorisation :

$S_n \leqslant u_5 \left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right)$.

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ S_n \leqslant 4u_5$.

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ S_n \leqslant 4u_5$.

$$S_n \leqslant u_5 \left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right).$$

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ S_n \leqslant 4u_5$.

$$S_n \leqslant u_5 \left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right).$$

La parenthèse est la somme des $(n-5)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$.

$$S_n \leqslant u_5 \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = 4u_5 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right).$$

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n \leqslant 4u_5$.

$$S_n \leqslant u_5 \left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right).$$

La parenthèse est la somme des $(n-5)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$.

$$S_n \leqslant u_5 \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = 4u_5 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right).$$

Puisque $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} < 1$,

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ S_n \leqslant 4u_5$.

$$S_n \leqslant u_5\left(1+\frac{3}{4}+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right).$$

La parenthèse est la somme des $(n-5)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$.

$$S_n \leqslant u_5\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1-\frac{3}{4}} = 4u_5\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right).$$

Puisque $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} < 1$, on a $S_n \leqslant 4u_5$.

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2ᵉ et 3ᵉ sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2ᵉ et 3ᵉ sondages sont négatifs ».

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}(V_3) = 0,6$, donc

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2[e] et 3[e] sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2[e] et 3[e] sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}(V_3) = 0,6$, donc $p(V_2 \cap V_3) =$

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}(V_3) = 0,6$, donc $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) =$

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2[e] et 3[e] sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2[e] et 3[e] sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}(V_3) = 0,6$, donc
$p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6$

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2^{e} et 3^{e} sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2^{e} et 3^{e} sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6$, donc $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6$, donc $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right)$

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2[e] et 3[e] sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2[e] et 3[e] sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6$, donc $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. **A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;**
2. **B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».**

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6$, donc $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right)$

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}(V_3) = 0,6$, donc $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p(V_2) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.

a) **Calculer les probabilités des évènements suivants :**

1. A : **« les 2^e^ et 3^e^ sondages sont positifs » ;**
2. B : **« les 2^e^ et 3^e^ sondages sont négatifs ».**

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6$, donc $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.
Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) =$

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2[e] et 3[e] sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2[e] et 3[e] sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6$, donc $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.
Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) =$

a) **Calculer les probabilités des évènements suivants :**

1. A : **« les 2^e^ et 3^e^ sondages sont positifs » ;**
2. B : **« les 2^e^ et 3^e^ sondages sont négatifs ».**

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right) = 0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6$, donc $p\left(V_2 \cap V_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(V_3\right) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.
Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 =$

a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;
2. B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

A : D'après l'énoncé $p\left(V_2\right)=0,6$ et $p_{V_2}\left(V_3\right)=0,6$, donc $p\left(V_2\cap V_3\right)=p\left(V_2\right)\times p_{V_2}\left(V_3\right)=0,6\times 0,6=0,36$.

B : On a $p\left(V_2\right)=0,6\Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right)=1-0,6=0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right)=0,9$.
Donc $p\left(\overline{V_2}\cap\overline{V_3}\right)=p\left(\overline{V_2}\right)\times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right)=0,4\times 0,9=0,36$.

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3[e] sondage soit positif.

On a $p_3 =$

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.

On a $p_3 = p\left(V_3\right) =$

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

On a $p_3 = p\left(V_3\right) = p\left(V_3 \cap V_2\right) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

On a $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.

D'après a), on sait que $p(V_2 \cap V_3) = 0,36$

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

On a $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.
D'après a), on sait que $p(V_2 \cap V_3) = 0,36$
Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) =$

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e^ sondage soit positif.

On a $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.
D'après a), on sait que $p(V_2 \cap V_3) = 0,36$
Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) =$

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.

On a $p_3 = p\left(V_3\right) = p\left(V_3 \cap V_2\right) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.
D'après a), on sait que $p\left(V_2 \cap V_3\right) = 0,36$
Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(V_3\right) = 0,4 \times (1 - 0,9) =$

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

On a $p_3 = p\left(V_3\right) = p\left(V_3 \cap V_2\right) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.

D'après a), on sait que $p\left(V_2 \cap V_3\right) = 0,36$

Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(V_3\right) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

b) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

On a $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.

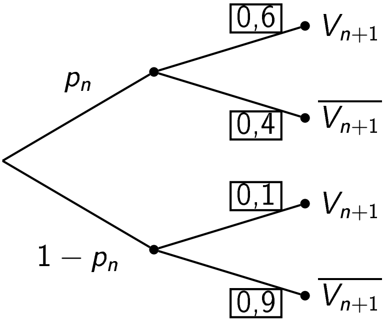
D'après a), on sait que $p(V_2 \cap V_3) = 0,36$

Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

Conclusion : $p_3 = 0,36 + 0,04 = 0,4$.

c) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :

c) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} =$

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 =$

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 =$

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 =$

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) =$

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) = 0,5u_n$.

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) = 0,5u_n$.
Cette égalité montre que la suite u est une suite géométrique de raison $0,5$;

e) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

i. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) = 0,5u_n$.
Cette égalité montre que la suite u est une suite géométrique de raison $0,5$;son premier terme est
$u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

ii. Exprimer p_n en fonction de n.

On sait que pour tout entier naturel n non nul

$$u_n =$$

ii. Exprimer p_n en fonction de n.

On sait que pour tout entier naturel n non nul

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} =$$

ii. Exprimer p_n en fonction de n.

On sait que pour tout entier naturel n non nul

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

ii. Exprimer p_n en fonction de n.

On sait que pour tout entier naturel n non nul

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{0,8}{2^{n-1}}.$$

ii. Exprimer p_n en fonction de n.

On sait que pour tout entier naturel n non nul

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{0,8}{2^{n-1}}.$$

De la définition de u_n il résulte que $p_n =$

ii. Exprimer p_n en fonction de n.

On sait que pour tout entier naturel n non nul

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{0,8}{2^{n-1}}.$$

De la définition de u_n il résulte que $p_n = 0,2 + \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

iii) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

iii) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

$p_n =$

iii) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

$p_n = 0,2 + \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

iii) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

$p_n = 0,2 + \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

On sait que $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{0,8}{2^{n-1}} =$

iii) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

$p_n = 0,2 + \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

On sait que $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{0,8}{2^{n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n =$

iii) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

$p_n = 0,2 + \dfrac{0,8}{2^{n-1}}$.

On sait que $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{0,8}{2^{n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2$.