

Exercice 5 page 386

1. a) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ d'où $f(0) = \lambda$

Or graphiquement, on trouve $f(0) = 1,25$ [Donc $\lambda = 1,25$]

b) $f(x) = 1,25 e^{-1,25x}$ pour $x \geq 0$

2. a) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1,25 e^{-1,25x} dx$

$$= [-e^{-1,25x}]_0^1$$

$$= -e^{-1,25} - (-e^0)$$

$$= 1 - e^{-1,25}$$

Le valeur exacte de l'aire sous la courbe de f est de $1 - e^{-1,25}$ u.a.

Cette aire correspond à $P(X \leq 1)$

b) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

Or $P(X \leq 2) = \int_0^2 1,25 e^{-1,25x} dx$

$$= [-e^{-1,25x}]_0^2$$

$$= -e^{-1,25 \times 2} - (-e^{-1,25 \times 0})$$

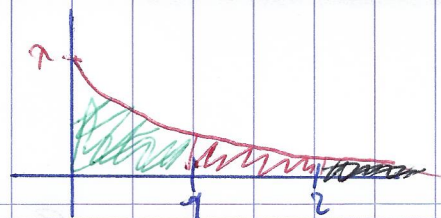
$$= -e^{-2,5} + 1$$

$$\text{d'où } P(X > 2) = 1 - (-e^{-2,5} + 1)$$

$$= 1 + e^{-2,5} - 1$$

$$\boxed{P(X > 2) = e^{-2,5}}$$

Cette probabilité correspond à l'aire sous la courbe de f entre 2 et $+\infty$.



c)

$$P(1 \leq X \leq 2) = 1 - P(X < 1) - P(X > 2)$$

$$= 1 - (1 - e^{-1,25}) - e^{-2,5}$$

$$= 1 - 1 + e^{-1,25} - e^{-2,5}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = e^{-1,25} - e^{-2,5}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) \approx 0,204$$

3. a) $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

$$E[X] = \frac{1}{1,25}$$

$$E[X] = \frac{4}{5} = 0,8$$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x \lambda e^{-\lambda x} dx$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x) dx$$

↑ formule de l'espérance

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = 0,8$$