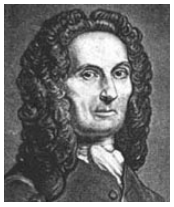
Activité : ***Vers la loi normale centrée et réduite***

Au XVIIe siècle, Jacques Bernoulli et Abraham de Moivre cherchent à calculer des probabilités dans le cadre d'une loi binomiale.

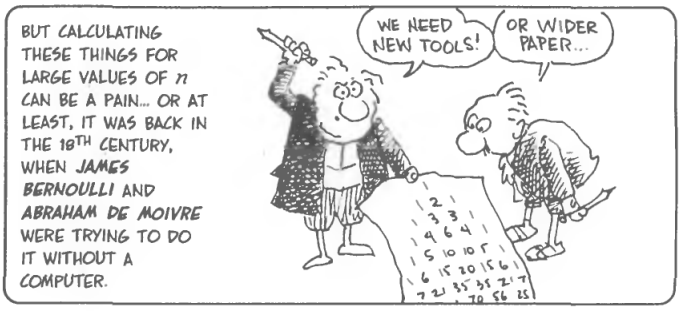
JACQUES BERNOULLI
(1654-1705)



ABRAHAM DE MOIVRE
(1667-1754)

Celles-ci sont définies par la formule $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

et les coefficients $\binom{n}{k}$ (lire "k parmi n") sont difficiles à calculer notamment en l'absence d'ordinateurs (!).



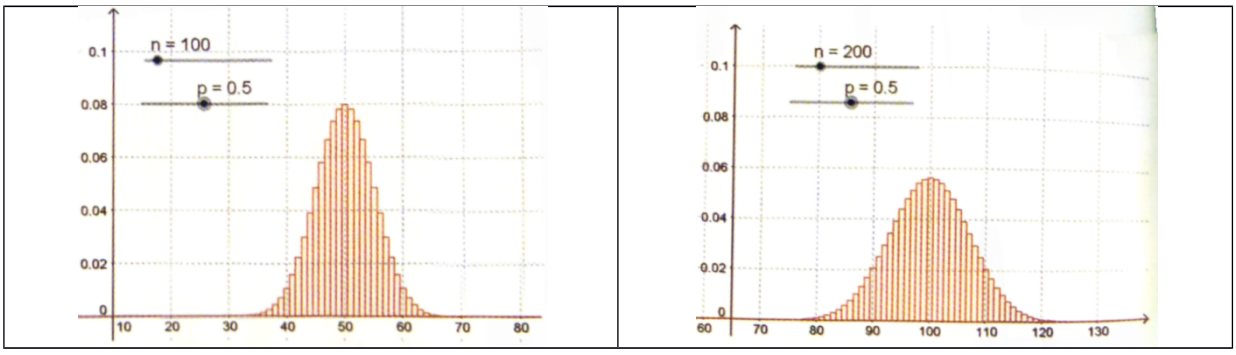
DEPLOYING A NEWLY INVENTED WEAPON, THE CALCULUS, DE MOIVRE SHOWED THAN WHEN $p=.5$, THE BINOMIAL DISTRIBUTION WAS CLOSELY APPROXIMATED BY A CONTINUOUS DENSITY FUNCTION WHICH COULD BE DESCRIBED VERY SIMPLY.

Source : Larry Gonick, Woollcott Smith - *The cartoon guide to statistics*

De Moivre propose alors une approximation de la loi binomiale dans le cas où $p=\frac{1}{2}$ à l'aide d'une loi de probabilté à densité. Essayons de comprendre graphiquement cette approximation.

Pour cela, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale de paramètre n et $p=\frac{1}{2}$.

1. On a représenté ci-dessous la loi de X_n par un histogramme d ' aire totale égale à 1, dans les cas où $n=100$ et $n=200$.



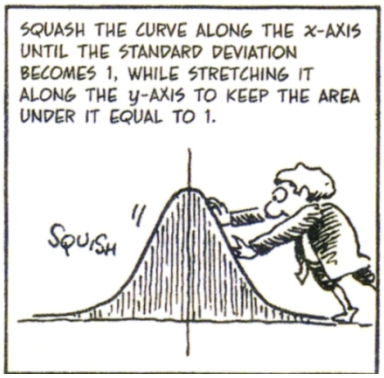
Quelles caractéristiques communes présentent ces diagrammes de X_n ?

……
……

……
……

……
……

2. Afin de faire apparaître la densité tant attendue, on transforme l'histogramme de la variable X_n grâce à deux opérations, comme représenté ci-dessous.

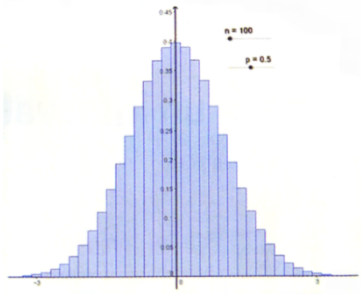


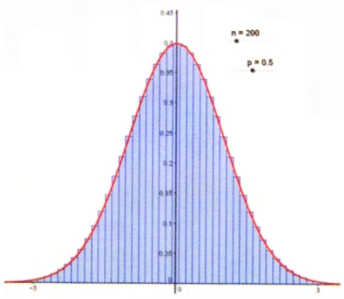
Mathématiquement, les deux opérations ci-dessus (« *slide and squash* ») reviennent à étudier la variable aléatoire Z_n définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$, où m est l ' espérance de X_n et σ son écart-type.

Déduire des dessins ci-dessus l'espérance et l'écart-type de la variable Z_n (*mean* signifie moyenne et *standard deviation* signifie écart-type) :

Espérance de Z_n : …… Ecart-type de Z_n : ……

3. On a représenté par un histogramme la loi de probabilité de Z_n dans les cas $n = 100$ et $n = 200$.





a. Interpréter graphiquement $P(-1 \le Z_n \le 1)$.

……
……

b. Sur le second histogramme, on a tracé la courbe de la fonction f définie sur R par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

a. Que constate-t-on ?

……
……

b. lnterpréter graphiquement $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

……
……

Conclusion :

Pour n grand, la loi de probabilité de la variable aléatoire Z_n est proche de celle d'une variable Z ayant pour densité la fonction f définie sur R par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

Cette loi de probabilité est appelée ***loi normale centrée réduite.***