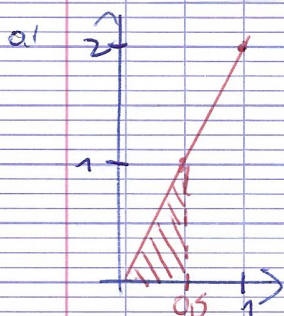


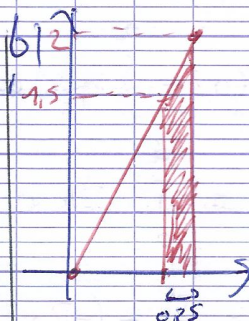
Exercice 24 page 394



$$P(X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} f(x) dx$$

$$= \frac{0.5 \times 1}{2}$$

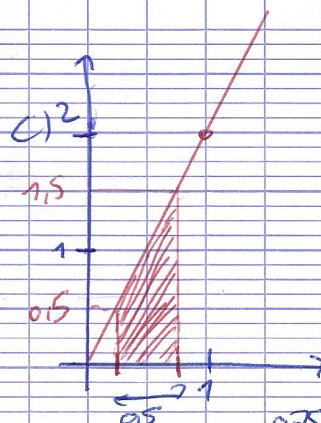
$$P(X \leq 0.5) = 0.5$$



$$P(X > 0.75) = \frac{(2 + 1.5) \times 0.25}{2}$$

$$= \frac{3.5 \times 0.25}{2}$$

$$P(X > 0.75) = 0.4375$$



$$P(0.25 < X < 0.75) = \int_{0.25}^{0.75} f(x) dx$$

$$= \frac{(1.5 + 0.5) \times 0.5}{2}$$

$$= 0.5$$

Exercice 29 page 394

1. $f(x) = 3x^2$ sur $[0, 1]$

- f continue sur $[0, 1]$ car f dérivable sur $[0, 1]$
- f est positive sur $[0, 1]$, car $x^2 \geq 0$ d'où $3x^2 \geq 0$
- $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$

Donc f est bien une densité de probabilité sur $[0, 1]$

2.

$$a) P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^1 3x^2 dx$$

$$= [x^3]_{0.5}^1$$

$$= 1^3 - 0.5^3$$

$$P(X \geq 0.5) = 0.875$$

$$b) P(X < 0.1) = \int_0^{0.1} 3x^2 dx$$

$$= [x^3]_0^{0.1}$$

$$= 0.1^3 - 0^3$$

$$P(X < 0.1) = 0.001$$

$$c) P(0.2 < X < 0.8) = \int_{0.2}^{0.8} 3x^2 dx$$

$$= [x^3]_{0.2}^{0.8}$$

$$= 0.8^3 - 0.2^3$$

$$P(0.2 < X < 0.8) = 0.504$$

Exercice 30 page 394

$$g(x) = 2xe^{-x^2} \text{ sur } [0; +\infty[$$

1. $I(a) = \int_0^a g(x) dx$

$$I(a) = \int_0^a 2xe^{-x^2} dx$$

$$I(a) = \int_0^a -(-2x)e^{-x^2} dx$$

Rappel: $\int ue^u = [e^u]$

$$I(a) = [-e^{-x^2}]_0^a$$

$$I(a) = -e^{-a^2} - (-e^{-0^2})$$

$$I(a) = -e^{-a^2} + 1$$

$$\boxed{I(a) = 1 - e^{-a^2}}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} -a^2 = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-a^2} = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{a \rightarrow +\infty} 1 - e^{-a^2} = 1 \text{ Donc } \boxed{\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = 1}$$

2. • Sur $[0; +\infty[$, g est continue car dérivable

• g est positive sur $[0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions positive sur $[0; +\infty[$ (si $x \geq 0$, $2x \geq 0$ et $e^{-x^2} \geq 0$)

$$\bullet \int_0^{+\infty} g(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a g(x) dx = 1 \text{ (d'après 1.)}$$

Donc g est bien une densité de probabilité

3. Soit m tel que $P(X \leq m) = 0,5$

$$\text{d'où } P(0 \leq X \leq m) = 0,5$$

car g définie sur $[0; +\infty[$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\begin{aligned} -\ln(0,5) &= \ln\left(\frac{1}{0,5}\right) \\ &= -(-\ln 2) \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ainsi } \int_0^m 2xe^{-x^2} dx = 0,5$$

$$\text{d'où } [-e^{-x^2}]_0^m = 0,5$$

$$1 - e^{-m^2} = 0,5$$

$$-e^{-m^2} = -0,5$$

$$e^{-m^2} = 0,5$$

$$-m^2 = \ln(0,5)$$

$$m^2 = -\ln(0,5)$$

$$m = \sqrt{-\ln(0,5)}$$

$$\boxed{m = \sqrt{-\ln(0,5)}}$$