Exercice

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\text{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\text{i}$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A]. Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \text{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.