Exercice type-bac

A. OLLIVIER

Mathématiques

Exercice

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

. 1 a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

. 1 a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

. 1 a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

2 Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

. 1 a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.
   b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

2 Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

. 1 a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.
   b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

2 Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3 a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

. 1 a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.
   b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

2 Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3 a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

   b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul :

$$u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Exercice

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

. 1 a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.
   b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.
2 Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.
3 a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

   b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul :

$$u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$$

4 Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$.

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$.

Donc $u_0 =$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x =$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

$u_1 =$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ et

$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x =$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

$u_0 + u_1 =$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$ et

$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$=$$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

$u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\ &= \end{aligned}$$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

$u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1\mathrm{d}x \\
&=
\end{aligned}$$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1\mathrm{d}x \\
&= [x]_0^1 \\
&=
\end{aligned}
$$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\mathrm{d}x \\ &= [x]_0^1 \\ &= 1 - 0 \\ &= \end{aligned}$$

1. a) Démontrer que $u_0 + u_1 = 1$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

Donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$ et

$u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1\mathrm{d}x \\
&= [x]_0^1 \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$u_1 =$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

Propriété

Une primitive de $f = \frac{u'}{u}$ est $F = \ln(u)$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a

Propriété

Une primitive de $f = \frac{u'}{u}$ est $F = \ln(u)$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

Propriété

Une primitive de $f = \frac{u'}{u}$ est $F = \ln(u)$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

Méthode

On écrit f sous la forme : $f = \alpha \frac{u'}{u}$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

Méthode

On écrit f sous la forme : $f = \alpha \dfrac{u'}{u}$

Une primitive de f est $F = \alpha \ln(u)$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$$f(x) = -1 \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}},$$

Méthode

On écrit f sous la forme : $f = \alpha \dfrac{u'}{u}$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -1 \times \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, donc $f = -1 \times \dfrac{u'}{u}$

Méthode

On écrit f sous la forme : $f = \alpha\dfrac{u'}{u}$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -1 \times \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, donc $f = -1 \times \dfrac{u'}{u}$

Une primitive de f est $-1 \ln(u)$.

Méthode

On écrit f sous la forme : $f = \alpha \dfrac{u'}{u}$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -1 \times \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, donc $f = -1 \times \dfrac{u'}{u}$

Une primitive de f est $-1 \ln(u)$.

C'est à dire $F(x) = -\ln(1 + e^{-x})$

Méthode

On écrit f sous la forme : $f = \alpha \dfrac{u'}{u}$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -1 \times \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, donc $f = -1 \times \dfrac{u'}{u}$

Une primitive de f est $-1\ln(u)$.

C'est à dire $F(x) = -\ln(1+e^{-x})$

$$\text{Donc } u_1 = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -1 \times \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, donc $f = -1 \times \dfrac{u'}{u}$

Une primitive de f est $-1 \ln(u)$.

C'est à dire $F(x) = -\ln(1+e^{-x})$

$$\text{Donc } u_1 = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$u_1 = \left(-\ln(1+e^{-1})\right) - \left(-\ln(1+e^{-0})\right)$$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -1 \times \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, donc $f = -1 \times \dfrac{u'}{u}$

Une primitive de f est $-1 \ln(u)$.

C'est à dire $F(x) = -\ln(1 + e^{-x})$

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_1 &= \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 \\ u_1 &= \left(-\ln(1+e^{-1})\right) - \left(-\ln(1+e^{-0})\right) \\ u_1 &= -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+1) \end{aligned}$$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

En posant $u(x) = 1 + e^{-x}$, on a $u'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -1 \times \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, donc $f = -1 \times \dfrac{u'}{u}$

Une primitive de f est $-1\ln(u)$.

C'est à dire $F(x) = -\ln(1+e^{-x})$

$$\text{Donc } u_1 = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$u_1 = \left(-\ln(1+e^{-1})\right) - \left(-\ln(1+e^{-0})\right)$$

$$u_1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+1)$$

$$u_1 = \ln(2) - \ln(1+e^{-1})$$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$$u_1 = \ln(2) - \ln(1 + e^{-1})$$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$u_1 = \ln(2) - \ln(1 + e^{-1})$
Or $u_0 + u_1 = 0$.

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$u_1 = \ln(2) - \ln(1 + e^{-1})$
Or $u_0 + u_1 = 0$. Donc $u_0 = 1 - u_1$.

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$u_1 = \ln(2) - \ln(1 + e^{-1})$
Or $u_0 + u_1 = 0$. Donc $u_0 = 1 - u_1$.
Par conséquent : $u_0 = 1 - \left(\ln(2) - \ln(1 + e^{-1})\right)$

1. b) Calculer u_1, puis déduisez-en u_0.

$u_1 = \ln(2) - \ln(1 + e^{-1})$

Or $u_0 + u_1 = 0$. Donc $u_0 = 1 - u_1$.

Par conséquent : $u_0 = 1 - \left(\ln(2) - \ln(1 + e^{-1})\right)$

$\boxed{\text{Ainsi : } u_0 = 1 - \ln(2) + \ln(1 + e^{-1})}$

2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

Or pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} > 0$

2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$
Or pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} > 0$
Et, pour tout $x \in [0;1]$, $1 + e^{-x} > 0$.

2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

Or pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} > 0$

Et, pour tout $x \in [0;1]$, $1 + e^{-x} > 0$.

Donc par quotient : pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$.

2. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

Or pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} > 0$

Et, pour tout $x \in [0;1]$, $1 + e^{-x} > 0$.

Donc par quotient : pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x > 0$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$

Or pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} > 0$

Et, pour tout $x \in [0;1]$, $1 + e^{-x} > 0$.

Donc par quotient : pour tout $x \in [0;1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x > 0$

$\boxed{\text{Par conséquent, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-(nx+x)}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-(nx+x)}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-(nx+x)}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-(nx+x)}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-(nx+x)}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-nx}e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-(nx+x)}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-nx-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-nx}e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \text{ car } e^{a+b} = e^a \times e^b$$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$

D'où $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-(nx+x)}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-nx-x}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-nx}e^{-x}}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} \mathrm{d}x$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Propriété

Une primitive de $f = u'e^u$ est $F = e^u$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} \mathrm{d}x$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Propriété

Une primitive de $f = u' e^u$ est $F = e^u$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \qquad -n \; e^{-nx} \mathrm{d}x$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Propriété

Une primitive de $f = u' e^u$ est $F = e^u$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{-n} \times (-n) e^{-nx} \mathrm{d}x$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Propriété

Une primitive de $f = u'e^u$ est $F = e^u$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{-n} \times (-n)e^{-nx}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{-n} \times (-n)e^{-nx}\mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$$

$$u_n + u_{n+1} = \left(\frac{-1}{n}e^{-n}\right) - \left(\frac{-1}{n}e^{-n\times 0}\right)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{-n} \times (-n) e^{-nx} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1$$

$$u_n + u_{n+1} = \left(\frac{-1}{n} e^{-n} \right) - \left(\frac{-1}{n} e^{-n \times 0} \right)$$

$$u_n + u_{n+1} = \frac{-1 e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}$$

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{-n} \times (-n) e^{-nx} \mathrm{d}x$$

$$u_n + u_{n+1} = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1$$

$$u_n + u_{n+1} = \left(\frac{-1}{n} e^{-n} \right) - \left(\frac{-1}{n} e^{-n \times 0} \right)$$

$$u_n + u_{n+1} = \frac{-1 e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

3. b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul : $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

On sait d'après 3. a) que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

3. b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul : $u_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait d'après 3. a) que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

D'où $u_n = \dfrac{1 - e^{-n}}{n} - u_{n+1}$

3. b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul : $u_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

On sait d'après 3. a) que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

D'où $u_n = \dfrac{1 - e^{-n}}{n} - u_{n+1}$

Or d'après 2. : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 0$.

3. b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul : $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

On sait d'après 3. a) que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

D'où $u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1}$

Or d'après 2. : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-u_{n+1} \leq 0$$

3. b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul : $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

On sait d'après 3. a) que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

D'où $u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1}$

Or d'après 2. : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-u_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1} \leq \frac{1-e^{-n}}{n} + 0$$

3. b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n non-nul : $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

On sait d'après 3. a) que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

D'où $u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1}$

Or d'après 2. : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-u_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1} \leq \frac{1-e^{-n}}{n} + 0$$

$$u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Par conséquent on a montré :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non-nul : } u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}}$$

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n$

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n} = 1$

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n} = 1$
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n} = 1$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Donc, par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n} = 1$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Donc, par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$

Ainsi, par le théorème des gendarmes :

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n} = 1$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Donc, par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$

Ainsi, par le théorème des gendarmes :

La suite (u_n) converge

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ d'après les questions précédentes.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{-n} = 1$
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Donc, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$
Ainsi, par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$