Exercice 2 **Commun à tous les candidats** **5 points**

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - x}$

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. **Montrer que la suite (I_n) est croissante.**

   $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

   On admet dans le texte que la fonction f est positive sur $[0\,;+\infty[$ donc sur $[n\,;n+1]$; on peut en déduire que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ et donc que $I_{n+1} - I_n > 0$ pour tout n.

   La suite (I_n) est donc croissante.

2. **On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{x} - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2}$.**

   a. **Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.**

   Sur $[0\ ;\ +\infty[$, on sait que $\mathrm{e}^{x} - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2}$; de plus, pour tout x, $\mathrm{e}^{x} - x > 0$. donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - x} \leqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}$.

   On multiplie cette inégalité par $x \geqslant 0$ donc : $\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - x} \leqslant \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{x}}$

   D'après la positivité de l'intégration : $\displaystyle\int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^{x} - x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n \frac{2x}{\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$

   ce qui équivaut à $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

   b. **On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq 1$**

   En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.

   On a $\displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^n x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq 2 \times 1 \leq 2$

   Donc : $\left.\begin{array}{l} I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow I_n \leqslant 2$

3. **Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.**

   La suite (I_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (I_n) est convergente.

Partie B

— K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
— A, x et h des réels.

```
Saisir K
A ← 0
x ← 0
h ← 1/K
Pour i variant de 1 à K
        A ← A + h × f(x)
        x ← x + h
Fin Tant que
```

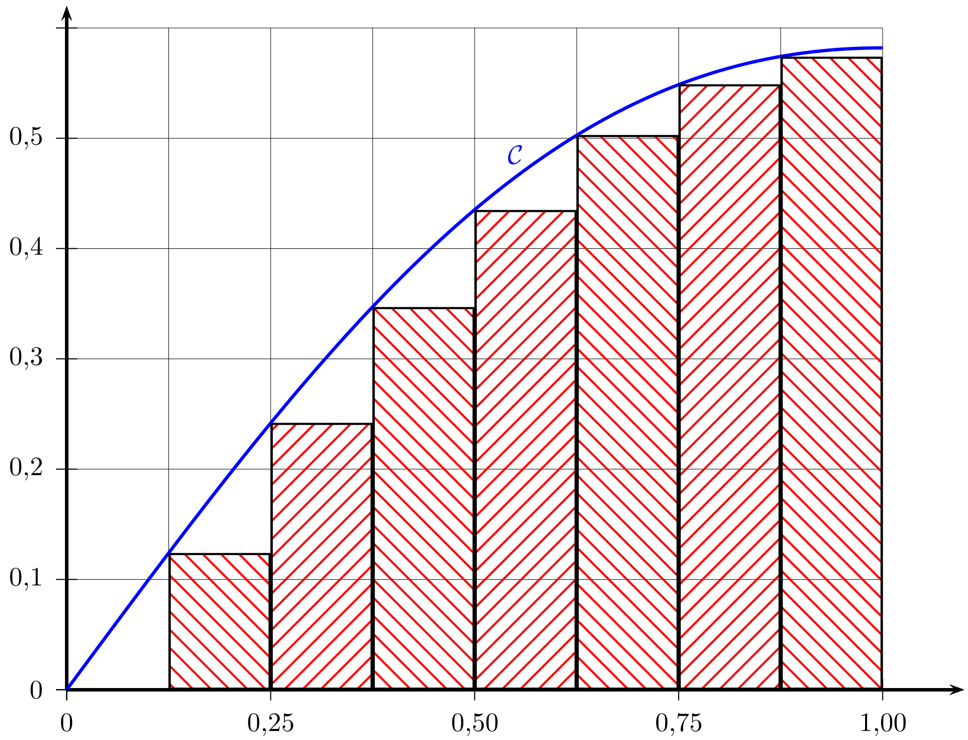
1. **Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.**

   On fait fonctionner l'algorithme pour $K = 4$ donc pour $h = 0{,}25$:

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2. En l'illustrant sur l'annexe à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique de la valeur de la variable A par cet algorithme pour $K = 8$.

Pour $K = 8$, l'algorithme donne la somme des aires des rectangles hachurés sur le graphique ci-dessous.



3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

Quand K devient grand, l'algorithme donne une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (voir le graphique ci-dessous).