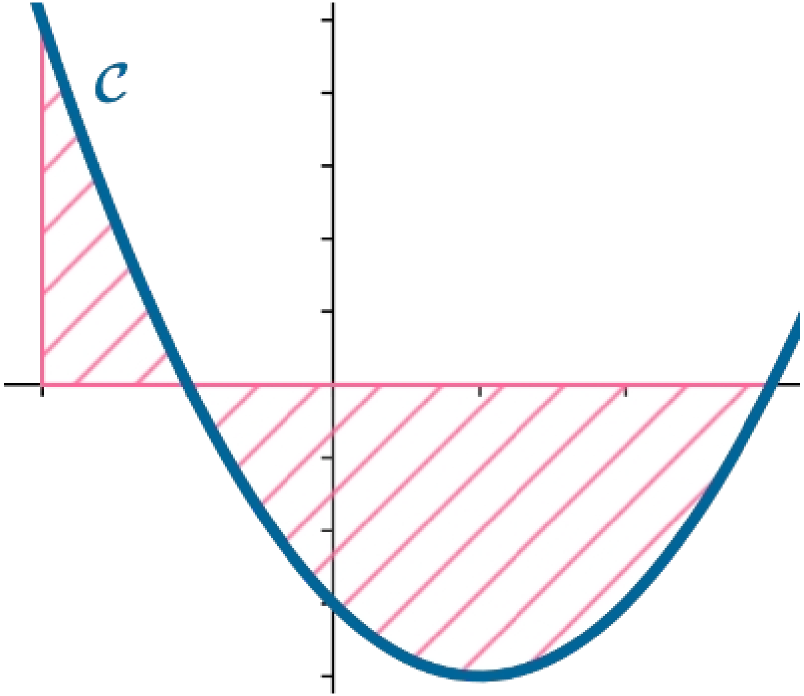
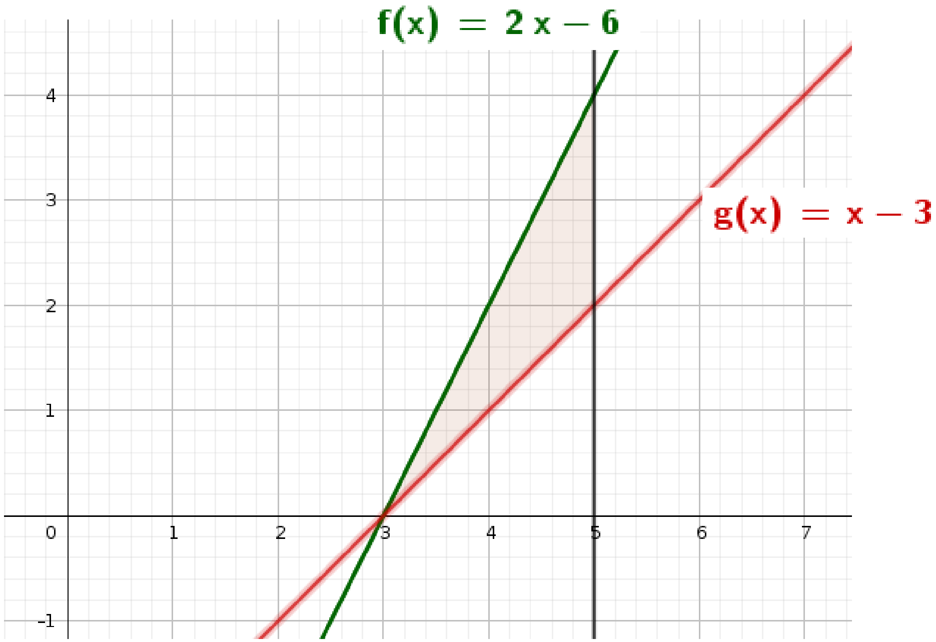
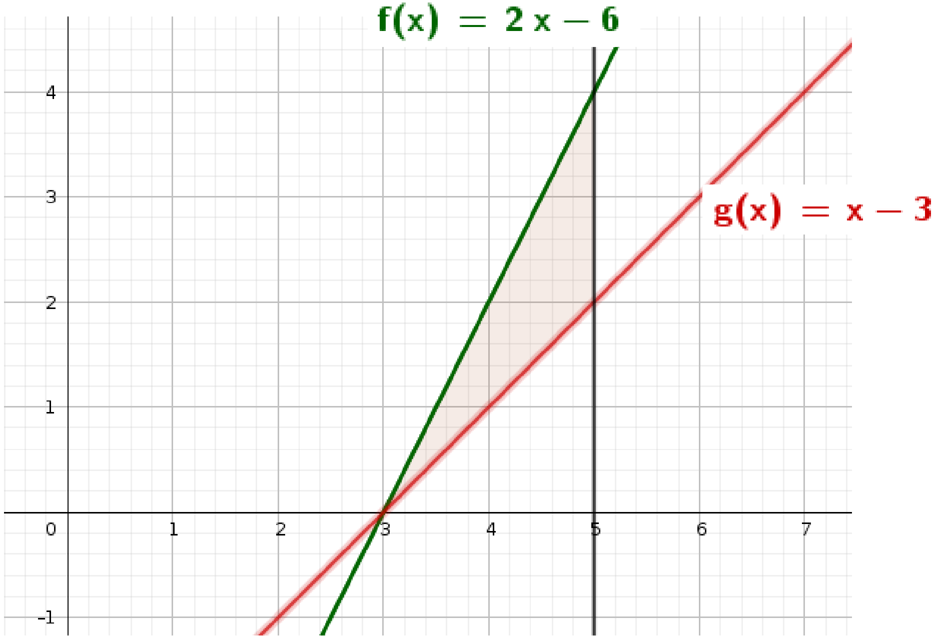

c



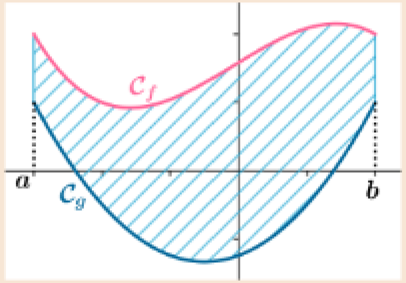
$f(x) = 2x - 6$
$g(x) = x - 3$
0
1
2
3
4
5
6
7
-1



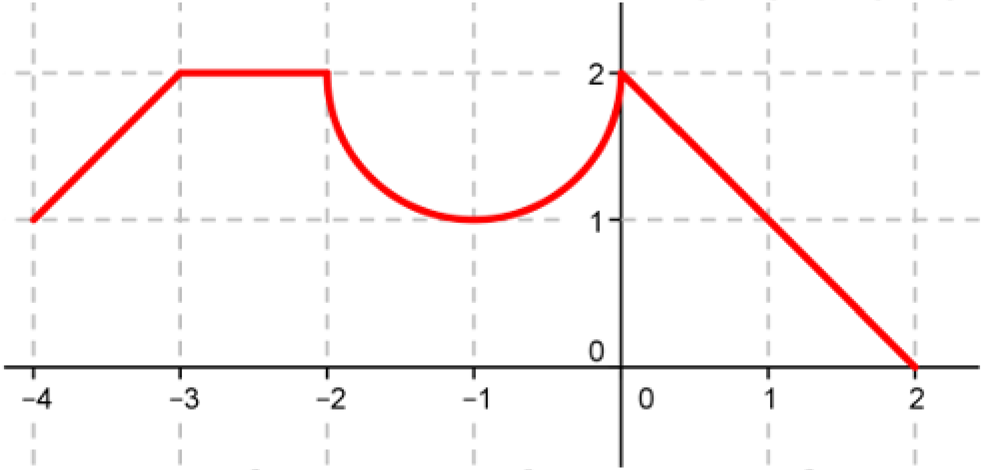
Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$



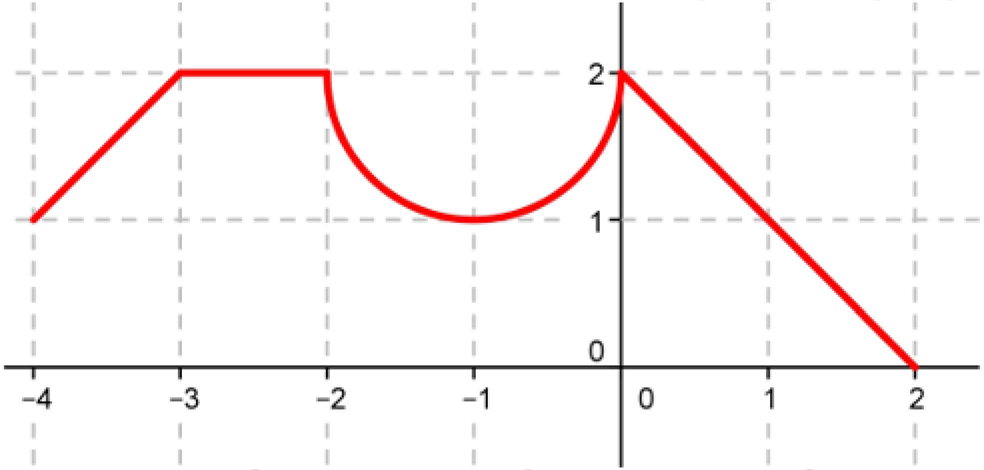
On a tracé la courbe d'une fonction f définie sur [-4 ;2]. Sur [-2 ;0], la courbe est un demi-cercle.



1) Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

2) En déduire $\displaystyle\int_{-4}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

On a tracé la courbe d'une fonction f définie sur [-4 ;2]. Sur [-2 ;0], la courbe est un demi-cercle.



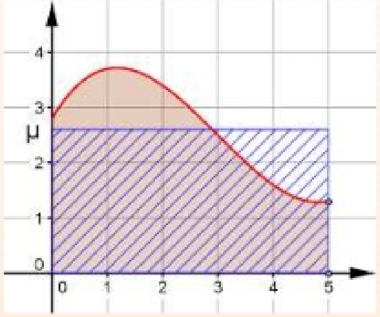
1) Déterminer $\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

2) En déduire $\int_{-4}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

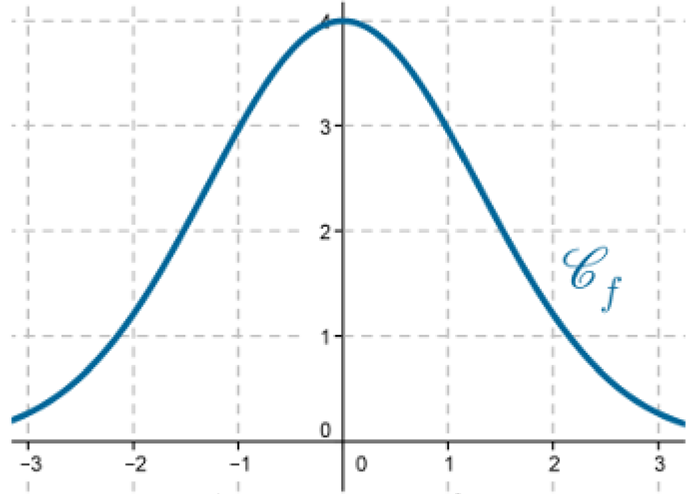
Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

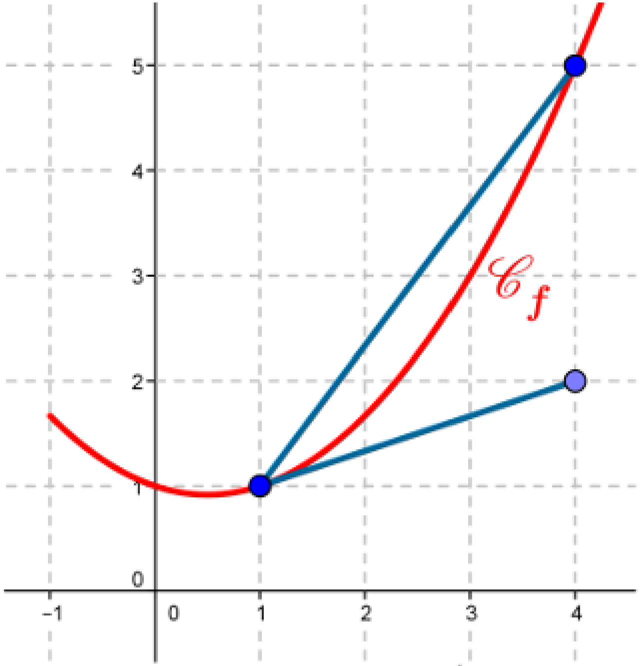


1) Comparer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Comparer $\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Encadrer $\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

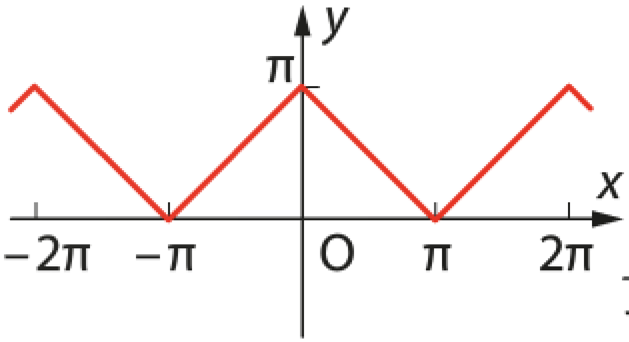
On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

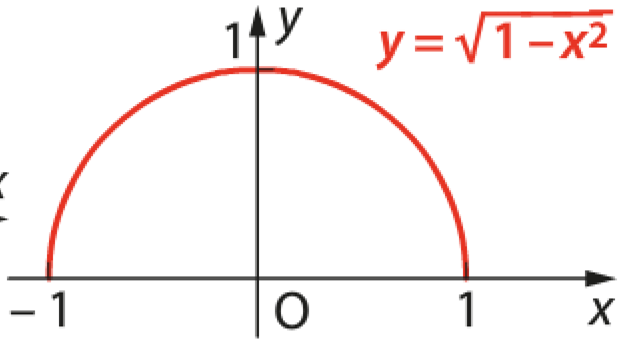


Déterminer un encadrement $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

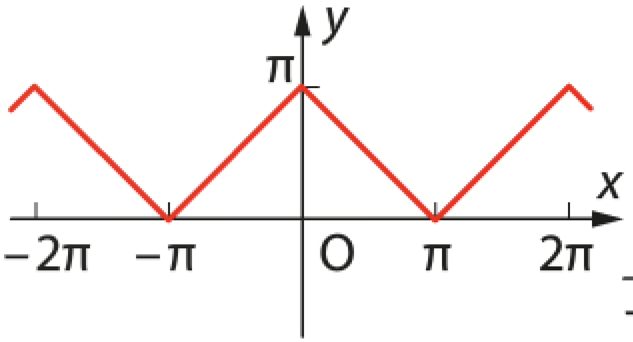
a) $I = [-\pi ; \pi]$; **b)** $I = [-1 ; 1]$.



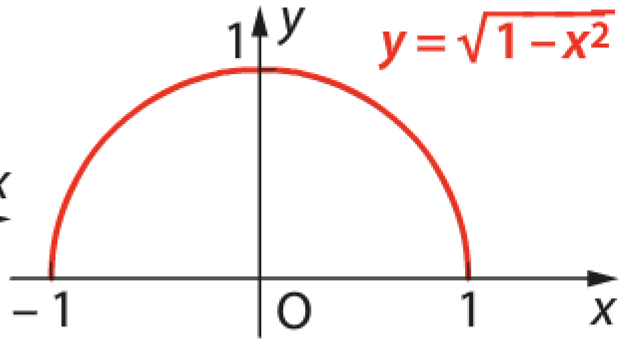


97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

a) $I = [-\pi ; \pi]$;

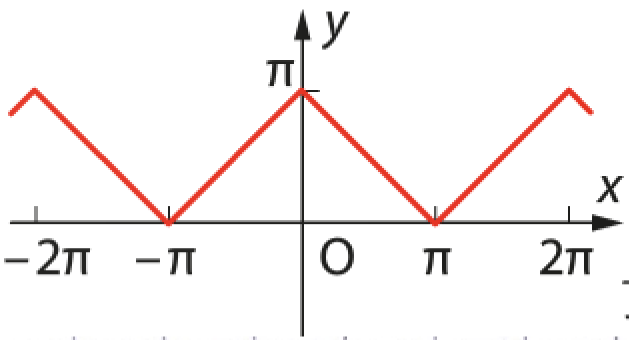


b) $I = [-1 ; 1]$.

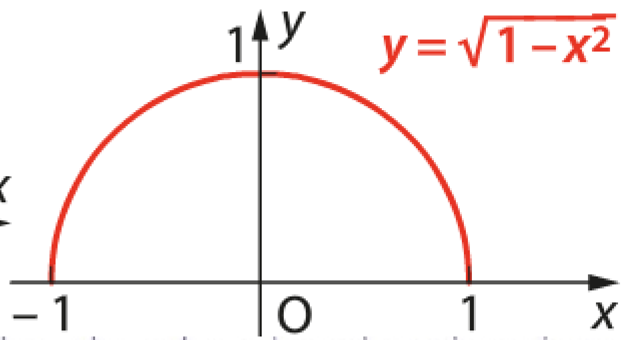


97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

a) $I = [-\pi ; \pi]$;



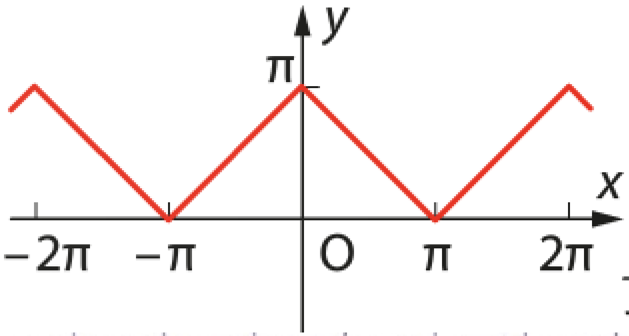
b) $I = [-1 ; 1]$.

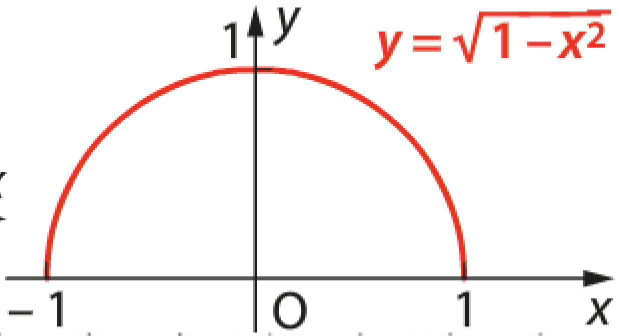


a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2\pi \times \pi}{2} = \pi^2$

97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

a) $I = [-\pi ; \pi]$; **b)** $I = [-1 ; 1]$.



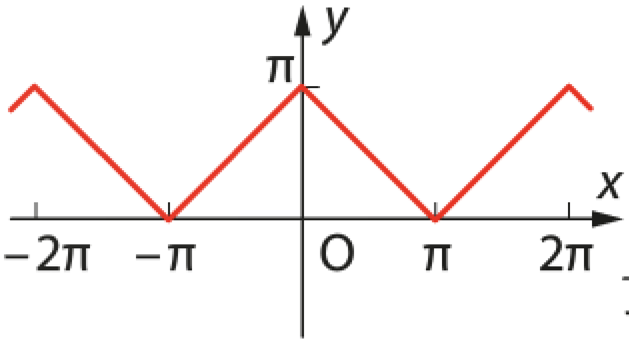


a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \dfrac{2\pi \times \pi}{2} = \pi^2$

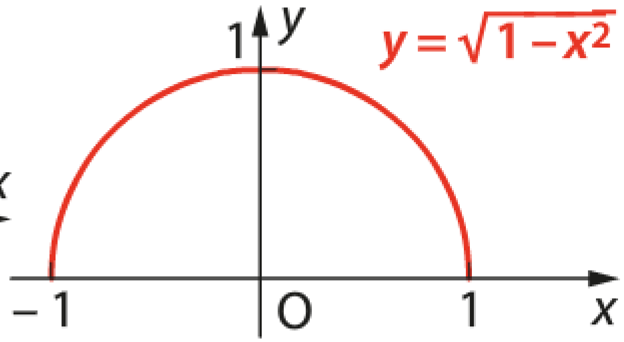
$\mu = \dfrac{1}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \dfrac{1}{2\pi} \times \pi^2 = \pi/2$

97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

a) $I = [-\pi ; \pi]$;

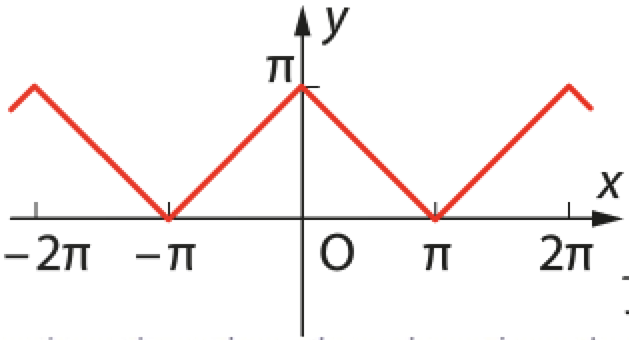


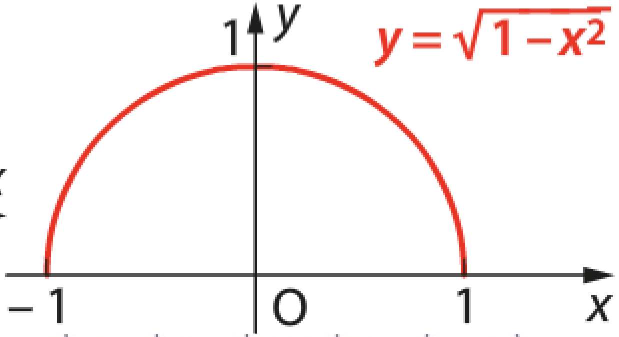
b) $I = [-1 ; 1]$.



97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

a) $I = [-\pi ; \pi]$; **b)** $I = [-1 ; 1]$.

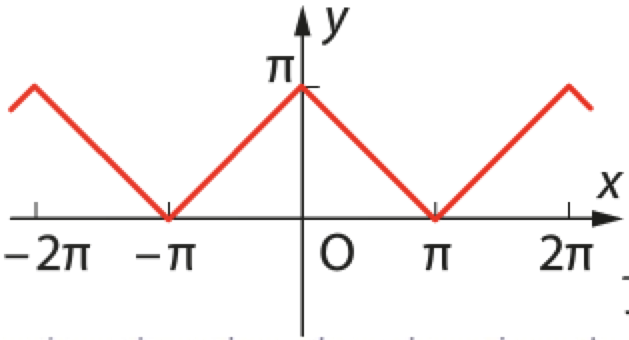


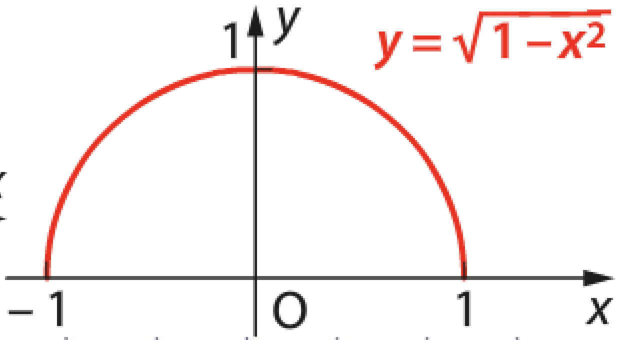


b) $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \pi/2$

97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

a) $I = [-\pi ; \pi]$; **b)** $I = [-1 ; 1]$.





b) $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \pi/2$

$\mu = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1} \frac{x}{x+1}\,dx - \int_1^{n} \frac{x}{x+1}\,dx$

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

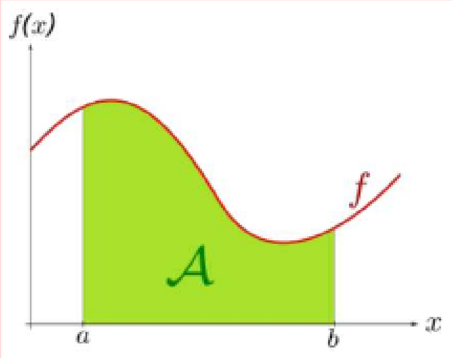
2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad V_{n+1} - V_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{x}{x+1}\,dx - \int_1^{n} \frac{x}{x+1}\,dx$

$V_{n+1} - V_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x}{x+1}\,dx \geq 0$

Propriété (Positivité)

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ Alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$



34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad V_{n+1} - V_n = \int_1^{n+1} \frac{x}{x+1}\,dx - \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$

$V_{n+1} - V_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1}\,dx \geq 0$ $\quad$ car $\frac{x}{x+1} \geq 0$ sur $[n ; n+1]$

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad V_{n+1} - V_n = \int_1^{n+1} \frac{x}{x+1}\,dx - \int_1^{n} \frac{x}{x+1}\,dx$

$V_{n+1} - V_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1}\,dx \geqslant 0$ $\quad$ car $\frac{x}{x+1} \geqslant 0$ sur $[n ; n+1]$

Donc (V_n) croissante.

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

2) Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$, f dérivable sur $[1;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, d'où f croissante sur $[1;+\infty[$

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

2) Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$, f dérivable sur $[1;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, d'où f croissante sur $[1;+\infty[$

d'où $\forall x \in [1;n]$, $f(1) \leq f(x) \leq f(n)$

$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{n}{n+1}$

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

2) Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$, f dérivable sur $[1;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, d'où f croissante sur $[1;+\infty[$

d'où $\forall x \in [1;n]$, $f(1) \leq f(x) \leq f(n)$

$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{n}{n+1}$

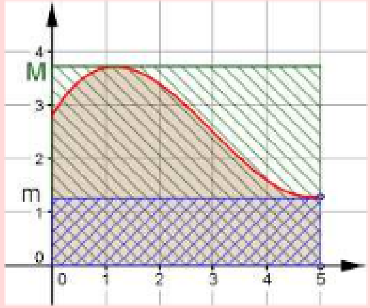
Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

et si $a < b$,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$$



34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

2) Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$, f dérivable sur $[1;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, d'où f croissante sur $[1;+\infty[$

d'où $\forall x \in [1;n]$, $f(1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{n}{n+1}$$

$$(n-1)\frac{1}{2} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \frac{(n-1)n}{n+1}$$

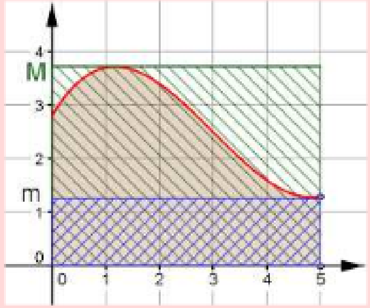
Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

et si $a < b$,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$$



34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2) Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$, f dérivable sur $[1;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, d'où f croissante sur $[1;+\infty[$

d'où $\forall x \in [1;n]$, $f(1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{n}{n+1}$$

$$(n-1)\frac{1}{2} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \frac{(n-1)n}{n+1}$$

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}\,dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Minoration : si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

2) Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$, f dérivable sur $[1;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, d'où f croissante sur $[1;+\infty[$

d'où $\forall x \in [1;n]$, $f(1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{n}{n+1}$$

$$(n-1)\frac{1}{2} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \frac{(n-1)n}{n+1}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} (n-1)\frac{1}{2} = +\infty$ et $V_n \geq \frac{1}{2}(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.