

Exercice 95 page 311

1. Les points A, B et C déterminent un plan si ils ne sont pas alignés, c'est à dire si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-4 \\ 2-(-1) \\ -1-3 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -1-4 \\ 3-(-1) \\ 2-3 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent un plan.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeur du plan (ABC)

$$A(4, -1, 3)$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = 4 + (-1)t + (-5)t' \\ y = -1 + 3t + 4t' \\ z = 3 + (-4)t + (-1)t' \end{cases} \quad \text{avec } t, t' \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 - t - 5t' \\ y = -1 + 3t + 4t' \\ z = 3 - 4t - t' \end{array} \right. \quad \text{est une représentation paramétrique du plan (ABC)}$$

2. Vérifions que le point D(-3; -2; 13) appartient au plan (ABC).

$$D \in (ABC) \Leftrightarrow \text{il existe } t, t' \text{ des réels tels que } \begin{cases} 4 - t - 5t' = -3 \\ -1 + 3t + 4t' = -2 \\ 3 - 4t - t' = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t - 5t' = -7 \\ 3t + 4t' = -1 \\ -4t - t' = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} t + 5t' = 7 \\ 3t + 4t' = -1 \\ -4t - t' = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{E} = \boxed{7 - 5t'} \\ 3(7 - 5t') + 4t' = -1 \\ -4t - t' = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 7 - 5t' \\ 21 - 15t' + 4t' = -1 \\ -4t - t' = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 - 5t' \\ -11t' = -22 \\ -4t - t' = 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t' = 2}$$

$$\begin{cases} t = 7 - 5 \times 2 \\ t' = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{E} = \boxed{-3} \\ -4 \times (-3) - 2 = 10 \Rightarrow 12 - 2 = 10 \\ \Rightarrow 10 = 10 \text{ OK} \end{cases}$$

Donc D appartient au plan (ABC)

$$(E) \in (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - t - 5t' = -5 \\ -1 + 3t + 4t' = 7 \\ 3 - 4t - t' = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t - 5t' = -9 \\ 3t + 4t' = 8 \\ -4t - t' = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + 5t' = 9 \\ 3t + 4t' = 8 \\ -4t - t' = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{E} = \boxed{9 - 5t'} \\ 3(9 - 5t') + 4t' = 8 \\ -4t - t' = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 9 - 5t' \\ 27 - 15t' + 4t' = 8 \\ -4t - t' = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 9 - 5t' \\ -11t' = -19 \\ -4t - t' = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 9 - 5 \times \frac{19}{11} \\ t' = \boxed{\frac{19}{11}} \\ -4t - t' = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E} = \frac{9 \times 11}{11} - \frac{95}{11} = \boxed{\frac{4}{11}}$$

$$\begin{cases} -4 \times \boxed{\frac{4}{11}} - \frac{19}{11} = 7 \Rightarrow \frac{-16}{11} - \frac{19}{11} = 7 \Rightarrow \frac{-35}{11} = 7 \end{cases} \text{ Absurde}$$

Donc le point E n'appartient pas au plan (ABC)