

Exercice 109 page 314

1. $A(1, -2, -1)$ $B(3, -5, -2)$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -5-(-2) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB)

Donc $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + (-3)t \\ z = -1 + (-1)t \end{cases}$ est une équation paramétrique de (AB)

2. Pour vérifier que 2 droites ne sont pas coplanaires, il suffit de vérifier qu'elles ne sont ni parallèles et ni sécantes.

La droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite d' a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Les droites d et d' sont sécantes si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ tq :

$$\begin{cases} 1+2t = 2-t' \\ -2-3t = 1+2t' \\ -1-t = t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+2t = 2 - (-1-t) \Rightarrow 1+2t = 3+t \Rightarrow 1+t=3 \Rightarrow t=2 \\ -1-2 = t' \Rightarrow t' = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=2 \\ -2-3 \times 2 = 1+2(-3) \Rightarrow -2-6 = 1-6 \Rightarrow -8 = -5 \end{cases}$$

↳ absurde

Donc les droites d et d' ne sont pas sécantes

3.^{a)} Déterminons l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $C(0; -3; 0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; -4; 0)$ et $\vec{v}(0; -5; 1)$.

$$\begin{cases} x = 0 + 1t + 0s \\ y = -3 + (-4)t + (-5)s \\ z = 0 + 0t + 1s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t - 5s \\ z = s \end{cases}$$

Vérifions que $A \in \mathcal{P}$:

$$\begin{cases} t = 1 \\ -3 - 4t - 5s = -2 \\ s = -1 \end{cases} \Rightarrow -3 - 4 \times 1 - 5 \times (-1) = -2 \Rightarrow -3 - 4 + 5 = -2 \Rightarrow -2 = -2 \quad \text{OK}$$

Donc $A \in \mathcal{P}$

Vérifions que $B(3; -5; -2) \in \mathcal{P}$

$$\begin{cases} t = 3 \\ -3 - 4t - 5s = -5 \\ s = -2 \end{cases} \Rightarrow -3 - 4 \times 3 - 5 \times (-2) = -5 \Rightarrow -3 - 12 + 10 = -5 \Rightarrow -5 = -5 \quad \text{OK}$$

Donc $B \in \mathcal{P}$

Puis le plan $\mathcal{P}$ contient les points A et B .

Et donc le plan $\mathcal{P}$ contient la droite d

b) les plans $\mathcal{P}$ et la droite d se coupent si il existe des réels t, s et t' tels que

$$\begin{cases} 2 - t' = t & (1) \\ 1 + 2t' = -3 - 4t - 5s & (2) \\ t' = s & (3) \end{cases}$$

On exprime les inconnues t et s en fonction de t' pour ensuite remplacer dans l'équation (2)

$$\begin{cases} \boxed{t = 2 - t'} & (1) \\ 1 + 2t' = -3 - 4(2 - t') - 5(t') & (2) \\ \boxed{D = t'} & (3) \end{cases}$$

$$(2) : 1 + 2t' = -3 - 8 + 4t' - 5t'$$

$$1 + 2t' = -11 - t'$$

$$3t' = -12$$

$$t' = -4$$

$$\begin{cases} t = 2 + 4 \\ t' = -4 \\ D = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 6 \\ t' = -4 \\ D = -4 \end{cases}$$

Donc D et d sont sécants

Et le point d'intersection a pour coordonnées :

$$C(2 - (-4), 1 + 2(-4), -4)$$

$$\boxed{C(6, -7, -4)}$$