Corrigé du DS de rattrapage

Exercice 1 — 5 points

1. On a $1^4 + 2\times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$, donc 1 est solution de (E).
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

$$\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right) = z^4+z^3+z^2+z^3+z^2+z-2z^2-2z-2 = z^4+2z^3-z-2.$$

3. D'après la question précédente, l'équation (E) équivaut à

$$z^2+z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+z+1=0$$

   — l'équation $z^2+z-2=0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta = 9$; elle possède donc deux solutions réelles qui sont -2 et 1 ;

   — l'équation $z^2+z+1=0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta=-3$, elle possède deux solutions complexes conjuguées qui sont $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   — Les solutions de (E) sont donc : -2, 1, $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Notons :

   — A le point d'affixe $a=1$,

   — B le point d'affixe $b=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

   — C le point d'affixe $c=-2$,

   — D le point d'affixe $d=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Les nombres complexes b et d étant conjugués, la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC) (qui n'est rien d'autre que l'axe réel). Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont donc perpendiculaires.

   De plus le milieu de $[AC]$ a pour affixe $\frac{a+c}{2}=-\frac{1}{2}$ et le milieu de $[BD]$ a pour affixe $\frac{b+d}{2}=\frac{b+\overline{b}}{2}=\frac{2\mathrm{R\acute{e}}(b)}{2}=-\frac{1}{2}$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent donc en leur milieu. On peut alors conclure que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

   Ou sinon, on pouvait calculer les longueurs AB, BC, CD et DA et montrer qu'elles sont toutes égales :

   Exemple de calcul pour AB :

$$\begin{aligned}
AB &= |b-a| \\
AB &= \left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right| \\
AB &= \left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \\
AB &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
AB &= \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} \\
AB &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exercice 2 — 5 points

1. — La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur $f'(a) = \mathrm{e}^a$, et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\;;\;\mathrm{e}^a)$.

— La tangente en N à $\mathcal{C}_g$ a pour coefficient directeur $g'(a) = -\mathrm{e}^{-a}$, et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\left(1\;;\;-\mathrm{e}^{-a}\right)$.

On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 1\times 1 + \mathrm{e}^a \times \left(-\mathrm{e}^{-a}\right) = 1 - \mathrm{e}^{a-a} = 1 - 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, donc les deux droites sont perpendiculaires.

2. **a.** On peut conjecturer que, pour tout réel a, $PQ = 2$.

b. — **Détermination de** P. La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ a pour équation :

$$y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a.$$

P est un point de cette droite, d'ordonnée 0 et d'abscisse x_P, on a donc :

$$0 = \mathrm{e}^a\left(x_P - a\right) + \mathrm{e}^a \iff \mathrm{e}^a\left(x_P - a\right) = -\mathrm{e}^a \iff x_P - a = -1 \iff x_P = a-1.$$

Ainsi le point P a pour coordonnées $P(a-1\;;\;0)$.

— **Détermination de** Q. La tangente en N à $\mathcal{C}_g$ a pour équation :

$$y = -\mathrm{e}^{-a}(x-a) + \mathrm{e}^{-a}.$$

Q est un point de cette droite, d'ordonnée 0 et d'abscisse x_Q, on a donc :

$$0 = -\mathrm{e}^{-a}\left(x_Q - a\right) + \mathrm{e}^{-a} \iff \mathrm{e}^{-a}\left(x_Q - a\right) = \mathrm{e}^{-a} \iff x_Q - a = 1 \iff x_Q = a+1.$$

Ainsi le point Q a pour coordonnées $Q(a+1\;;\;0)$.

— **Calcul de** PQ. Les points P et Q étant situés sur l'axe des abscisses, la distance entre ces deux points est donnée par :

$$PQ = \left|x_P - x_Q\right| = |(a-1)-(a+1)| = |a-1-a-1| = |-2| = 2.$$

La conjecture est démontrée.

Exercice 3 **10 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

1. soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
2. soit malade (atteint par le virus) ;
3. soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
2. Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
3. Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

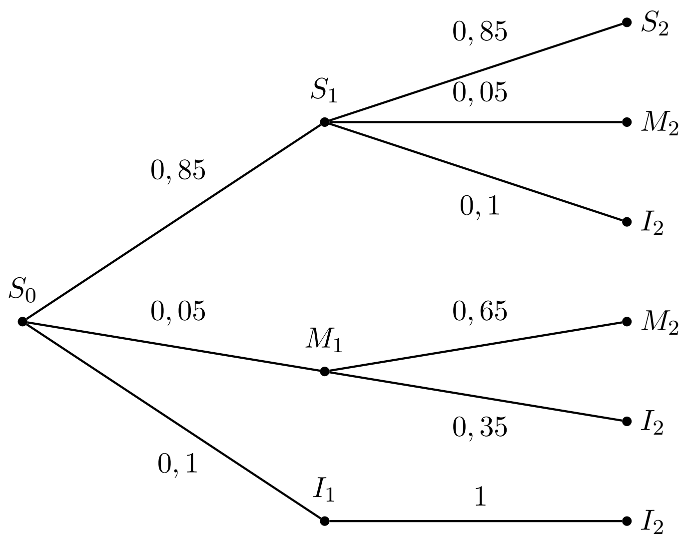
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P\left(S_0\right) = 1 \;;\; P\left(M_0\right) = 0 \text{ et } P\left(I_0\right) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. $I_2 = \left(S_1 \cap I_2\right) \cup \left(M_1 \cap I_2\right) \cup \left(I_1 \cap I_2\right)$ (réunion d'évènements incompatibles).
D'où : $P\left(I_2\right) = P_{S_1}\left(I_2\right) \times P\left(S_1\right) + P_{M_1}\left(I_2\right) \times P\left(M_1\right) + P_{I_1}\left(I_2\right) \times P\left(I_1\right)$ (formule des probabilités totales).
Donc : $P\left(I_2\right) = 0,1 \times 0,85 + 0,35 \times 0,05 + 1 \times 0,1 = 0,085 + 0{,}0175 + 0,1 = 0{,}2025$; $\boxed{P\left(I_2\right) = 0{,}2025}$.

3. $P_{I_2}(M_1) = \dfrac{p(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \dfrac{0,05 \times 0,35}{0{,}202\,5} = \dfrac{0{,}001\,75}{0,2025} \approx 0,086\,;$ $\boxed{P_{I_2}(M_1) \approx 0,086}$

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. L'univers Ω est la réunion des évènements disjoints S_n, M_n et I_n donc $u_n + v_n + w_n = P(\Omega) = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a. Dans la cellule C3, il faut taper la formule

=0,65*C2+0,05*B2.

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

On voit que la valeur maximale de v_n est obtenue pour $n = 4$ et vaut environ 0,085 9.

3. a. D'après l'énoncé, $P(S_{n+1}) = 0,85P(S_n)$ dnonc $\boxed{u_{n+1} = 0,85u_n}$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,85$.

On en déduit que $u_n = u_0q^n$ donc $\boxed{u_n = 0,85^n}$ pour tout n

b. Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

i. **Initialisation** : $0,85^0 - 0,65^0 = 1 - 1 = 0 = v_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

ii. Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque, donc $v_n = 0,85^n - 0,65^n$.

Alors : $v_{n+1} = 0,05u_n + 0,65v_n = 0,05 \times 0,85^n + 0,65 \times \dfrac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$

$= \left(0,05 + \dfrac{0,65}{4}\right) \times 0,85^n - \dfrac{1}{4} \times 0,65^{n+1} = \dfrac{0,85}{4} \times 0,85^{n+1} - \dfrac{0,65^{n+1}}{4} = \dfrac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right).$

La propriété est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propruété est vraie pour tout n

4. $-1 < 0,65 < 1$ et $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,65^n = 0$.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$.

Comme $u_n + v_n + w_n = 1$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1}$.

Interprétation : cela signifie donc que sur le long terme, selon ce modèle, tous les individus seront immunisés.