# Cours de terminale S
# Continuité

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2019-2020

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un réel de $I$.

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un réel de $I$.

- On dit que $f$ est **continue en a** si

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un réel de $I$.

- On dit que $f$ est **continue en a** si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un réel de $I$.

- On dit que $f$ est **continue en a** si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que $f$ **est continue sur I** si elle est continue en tout point de I.

## Remarque

*Une fonction définie sur un intervalle I est* ***continue*** *sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).*

## Remarque

*Une fonction définie sur un intervalle I est **continue** sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).*

**Exemples :**

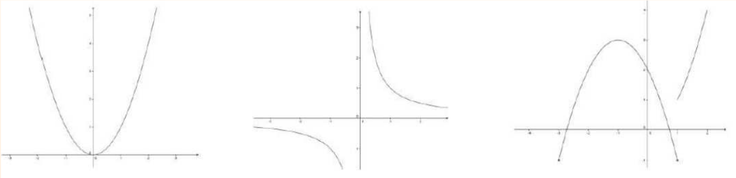


FIGURE – *La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. f est définie mais pas continue sur $[-3; 2]$ ; il y a une rupture en $x = 1$.*

**Théorème**

Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est ..........sur $I$.

**Théorème**

Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est continue sur $I$.

**Théorème**

Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est continue sur $I$.

**Attention :** ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

**Théorème**

Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est continue sur $I$.

**Attention :** ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction $f$ est continue en $a$ si sa courbe $C_f$ ne présente pas de saut en son point d'abscisse $a$.

**Théorème**

Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est continue sur $I$.

**Attention :** ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction $f$ est continue en $a$ si sa courbe $C_f$ ne présente pas de saut en son point d'abscisse $a$.

- Une fonction $f$ est dérivable en $a$ si sa courbe $C_f$ admet une tangente non verticale en son point d'abscisse $a$.

## Démonstration.

Soit $f$ définie et dérivable sur $I$ et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

## Démonstration.

Soit $f$ définie et dérivable sur $I$ et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

## Démonstration.

Soit $f$ définie et dérivable sur $I$ et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

## Démonstration.

Soit $f$ définie et dérivable sur $I$ et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

D'où :

$$h\tau(h) = f(a+h) - f(a)$$

## Démonstration.

Soit $f$ définie et dérivable sur $I$ et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

D'où :

$$h\tau(h) = f(a+h) - f(a)$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h =$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) =$$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) =$$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \longrightarrow 0} h\tau(h) + f(a) =$$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \longrightarrow 0} h\tau(h) + f(a) = f(a)$$

## Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \longrightarrow 0} h\tau(h) + f(a) = f(a)$$

Ainsi $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$, Donc $f$ est continue en $a$. □

**Remarque :**

La réciproque de ce théorème est . . . . . .

**Remarque :**
La réciproque de ce théorème est fausse

**Remarque :**
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

**Remarque :**
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

**Conséquences :**

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur ......
..............................

**Remarque :**
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

**Conséquences :**

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

**Remarque :**
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

**Conséquences :**

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Remarque :**
La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

**Conséquences :**

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

**Convention dans un tableau de variations :**

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction $f$ indique :

**Convention dans un tableau de variations :**

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction $f$ indique :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Convention dans un tableau de variations :**

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction $f$ indique :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction sur cet intervalle.

**Convention dans un tableau de variations :**

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction $f$ indique :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction sur cet intervalle.

**Théorème** (des valeurs intermédiaires)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . .

**Théorème** (des valeurs intermédiaires)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.

**Théorème** (des valeurs intermédiaires)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, $f$ prend, entre $a$ et $b$, toute ......................
....................

**Théorème** (des valeurs intermédiaires)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, $f$ prend, entre $a$ et $b$, toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

**Théorème** (des valeurs intermédiaires)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, $f$ prend, entre $a$ et $b$, toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

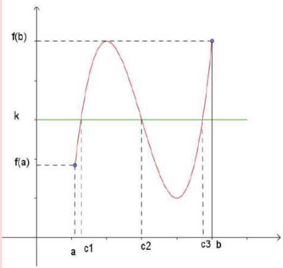



Illustration graphique

**Corollaire**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet ................................ ......

**Remarque :**
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de $f$ en $a$ et en $b$.

**Corollaire**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

**Remarque :**
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de $f$ en $a$ et en $b$.

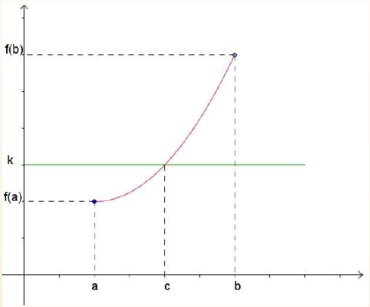
**Corollaire**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

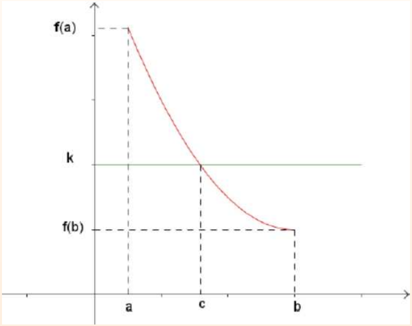
**Remarque :**
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de $f$ en $a$ et en $b$.

## Illustration graphique :

- Cas où f est strictement croissante




- Cas où f est strictement décroissante



## Tableaux de variations :