Chapitre 8 : Continuité

1 Notion intuitive de continuité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que f est **continue en a** si ....
- On dit que f **est continue sur I** si elle est continue en tout point de I.

Remarque

Une fonction définie sur un intervalle I est ***continue*** *sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).*

Exemples :

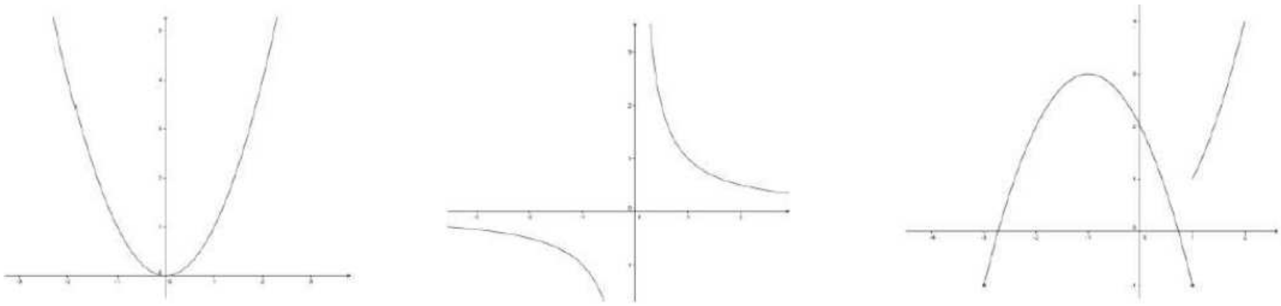


FIGURE 1 – *La fonction carré, la fonction inverse et une fonction f*

La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. f est définie mais pas continue sur $[-3; 2]$; il y a une rupture en $x = 1$.

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est ....sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de ....
- Une fonction f est dérivable en a si sa courbe C_f admet une tangente ....

Remarque :

La réciproque de ce théorème est .... : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur ....
- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur ....

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Convention dans un tableau de variations :
Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

— la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;

— la . . . .

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe . . . .
. . . .
Autrement dit, f prend, entre a et b,
toute . . . .
. . . .

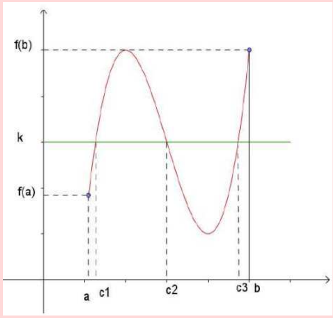


Illustration graphique

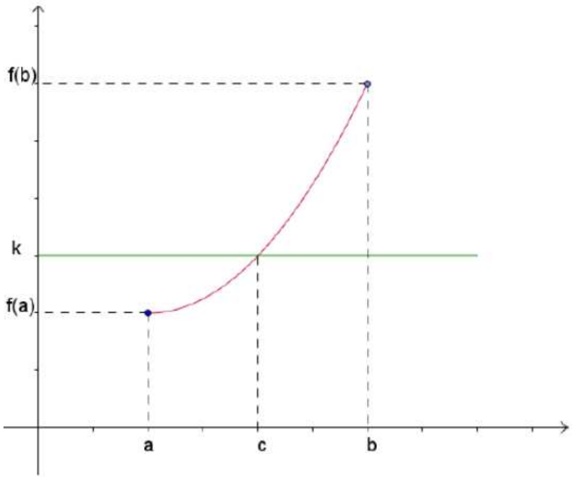
Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet . . . .
. . . .

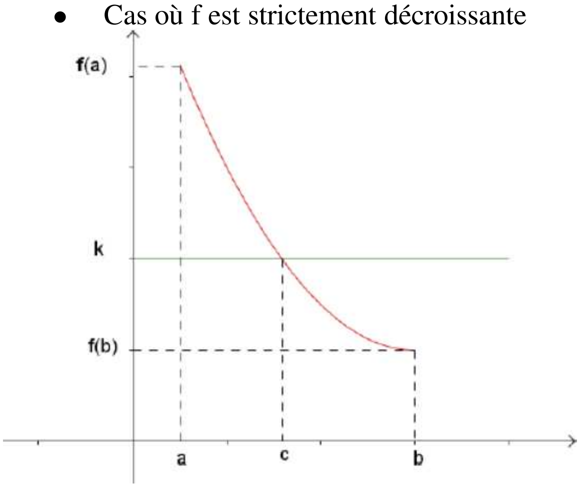
Remarque :
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.

Illustration graphique :

- Cas où f est strictement croissante



- Cas où f est strictement décroissante



Tableaux de variations :