Chapitre 6 : Les nombres complexes

1 Les nombres complexes

1.1 Définition

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés . . . . , tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble . . . . ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que . . . . ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul . . . . ;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z =$ . . . . . . où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la . . . .

1.2 Vocabulaire

Définition

- On dit que le réel a est la . . . . de z et on la note $a =$ . . . .
- On dit que b est la . . . . de z et on la note $b =$ . . . .
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé . . . .

1.3 Conséquences

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que . . . .
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que . . . .

1.4 Propriétés

Propriété

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont . . . . :

$$a + bi = a' + b'i \iff \text{. . . . .}$$

- En particulier :

$$a + bi = 0 \iff a = \ldots \quad \text{et} \quad b = \ldots$$

2 Opérations sur les complexes

2.1 Calculs

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

- somme : $z + z' =$ . . . .
- produit : $zz' =$ . . . .

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$(a+bi)(a-bi) = \dots\dots\dots\dots$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2.2 Conjugué

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $\dots\dots\dots$ On le note $\overline{z}$.

Exemple
Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = \dots\dots\dots$; si $z = 4$ alors $\overline{z} = \dots$; si $z = -2i$ alors $\overline{z} = \dots$.

Conséquence : Si $z = a + bi$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2bi$, d'où :

$$z + \overline{z} = \dots\dots\dots \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = \dots\dots\dots$$

Il en resulte que :
- "Le nombre complexe z est réel" équivaut à "$z = \dots$ ".
- "Le nombre complexe z est imaginaire pur" équivaut à "$z + \overline{z} = \dots$ ".

Propriété

$\overline{z + z'} = \dots\dots\dots \qquad \overline{zz'} = \dots\dots\dots \qquad \overline{z^n} = \dots\dots$ pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \dots\dots$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \dots\dots$

Remarque
$\overline{\overline{z}} = \dots \qquad z\overline{z} = \dots\dots\dots$

3 Equation du second degré à coefficients réels

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels, a toujours des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle : $z_1 = z_2 = \ldots\ldots$
- si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{avec } z_2 = \ldots$$

Conséquence
Dans $\mathbb{C}$, le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise toujours sous la forme : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Démonstration
On met le trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme canonique :

$$az^2 + bz + c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est résoudre

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- si $\Delta > 0$ ou si $\Delta = 0$, on sait que l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ et deux seulement (distinctes ou égales). Elle a donc deux solutions complexes et deux seulement puisque $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

- si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, on a $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Donc :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{avec } z_2 = \overline{z_1}.$$

Exemple 
Résoudre dans l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 Représentation géométrique d'un nombre complexe

4.1 Définition

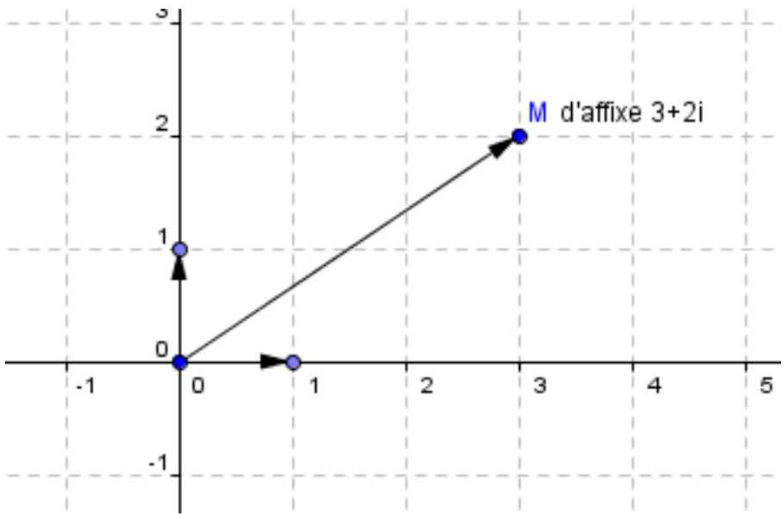
Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + bi$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}$ $(a; b)$ appelés .... et .... de z.

- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}$ $(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + bi$, appelé .... et ....

Le plan est alors appelé plan complexe.



4.2 Remarques

- Le point image d'un réel appartient à l' .... Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe ....
- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l' .... Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des ....

4.3 Propriétés

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe ....

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe ....

On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe ....
- $\lambda \vec{w}$ a pour affixe ....

Preuve :
Il s'agit simplement d'une autre écriture des propriétés déjà connues pour les coordonnées.