Chapitre 11 : Calculs de limites de fonction

1 Limites et opérations

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

. . . .

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

Limite en 2^+ et en 2^- :

1.1 Limite d'une composée

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples.

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\left(u(x)\right)$$

$$x \xrightarrow{v \circ u} v\left(u(x)\right)$$

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.
La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la . . . .
Elle est notée $v \circ u$, ou parfois $v(u)$.

Pour tout réel x de I : $v \circ u(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = \dots$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.
On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

On a :

2 Limite et comparaisons

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \dots$
Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \dots$

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

Alors $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Remarque : on obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.
Exemple :
Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

D'ou : $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Comme $x > 0$, par division, on a : $\dfrac{-4}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{4}{x}$

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{-4}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{-4}{x} = 0$,

Donc par le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.