Cours de terminale S
Calcul de limites de fonctions

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2018-2019

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty", \quad "\frac{0}{0}",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty", \quad "\frac{0}{0}", \quad "\frac{\infty}{\infty}"$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) =$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} =$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}(x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) =$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) =$$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

On a alors une asymptote verticale d'équation

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

On a alors une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples.

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\left(u(x)\right)$$

$$x \xrightarrow{v \circ u} v\left(u(x)\right)$$

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la ....

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Définition

Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Elle est notée $v \circ u$, ou parfois $v(u)$.

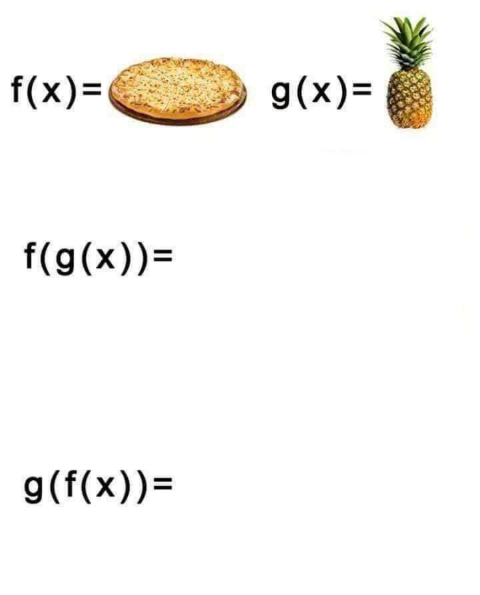
Définition

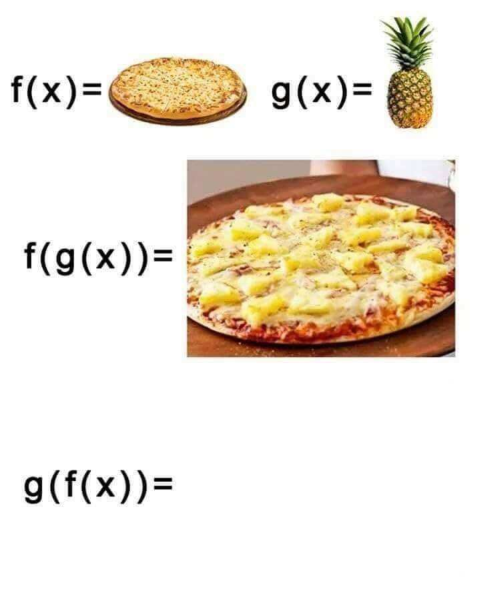
Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u soit contenue dans J : $u(I) \subset J$.

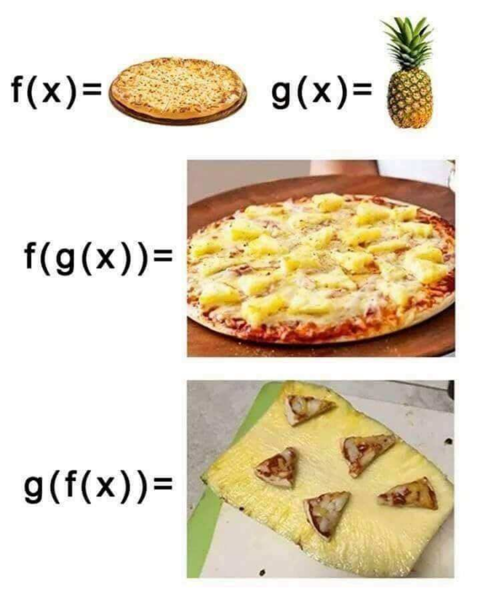
La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la composée de u par v.

Elle est notée $v \circ u$, ou parfois $v(u)$.

Pour tout réel x de I : $v \circ u(x) = v(u(x))$


f(x)=
g(x)=
f(g(x))=
g(f(x))=


f(x)=
g(x)=
f(g(x))=
g(f(x))=


f(x)=
g(x)=
f(g(x))=
g(f(x))=

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = \ldots$

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Exemple :

Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\longrightarrow-\infty} X^2 = +\infty$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \ldots$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
Majoration : si $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ldots$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
Majoration : si $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors ....

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Remarque : on obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0;+\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

D'ou : $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

D'ou : $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Comme $x > 0$, par division, on a : $\dfrac{-4}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{4}{x}$

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0;+\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

D'ou : $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Comme $x > 0$, par division, on a : $\dfrac{-4}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{4}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{x} = 0$,

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.

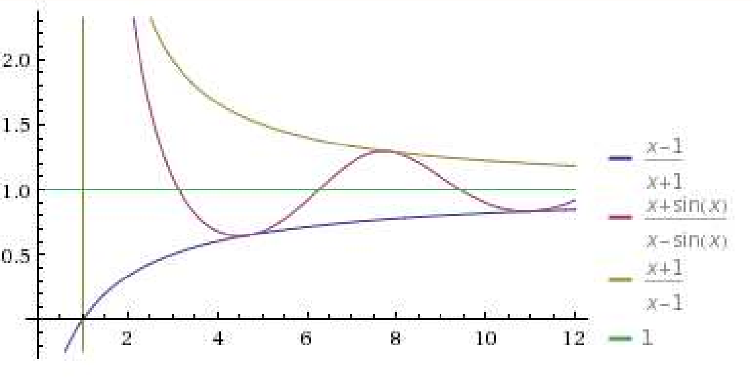
On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

D'ou : $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Comme $x > 0$, par division, on a : $\dfrac{-4}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{4}{x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{x} = 0$,

Donc par le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.


2.0
1.5
1.0
0.5
2
4
6
8
10
12
$\frac{x-1}{x+1}$
$\frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}$
$\frac{x+1}{x-1}$
1