T$^{\text{erm}}$S

Devoir surveillé

durée : 2h00

14 janvier 2019

Devoir surveillé à rendre sur copie double. Rendre le sujet avec la copie. Nom :

Exercice 1 — 2 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)(1 + \cos x)$.

1. Démontrer que f est impaire et périodique.

2. Calculer la dérivée de f sur $[0, \pi]$

Exercice 2 — 8 points

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite u.

2. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction h.
En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

Exercice 3 — 10 points

I. Questions générales

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

2. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + \text{i}$, $\quad b = -1 + 3\text{i}$, $\quad c = -\sqrt{5} - \text{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si : $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$

2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b. Vérifier l'égalité : $(b + c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b + c}{b - c} = \dfrac{w}{|b - c|^2}$.

c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b + c}{b - c}$ est imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a + b + c$. (On suppose que $b + c \neq 0$)

a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$.

b. Prouver que $\left(\overrightarrow{\text{CB}},\ \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

(On admet de même que $\left(\overrightarrow{\text{CA}},\ \overrightarrow{\text{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Devoir surveillé

durée : 2h00

Devoir surveillé à rendre sur copie double. Rendre le sujet avec la copie. Nom :

Exercice 1 — 2 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)(1 + \cos x)$.

1. Démontrer que f est impaire et périodique.

2. Calculer la dérivée de f sur $[0, \pi]$

Exercice 2 — 8 points

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite u.

2. **a.** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction h.
En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

Exercice 3 — 10 points

I. Questions générales

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

2. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

Il. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + \text{i}$, $\quad b = -1 + 3\text{i}$, $\quad c = -\sqrt{5} - \text{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si : $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$

2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b. Vérifier l'égalité : $(b + c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a + b + c$. (On suppose que $b + c \neq 0$)

a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$.

b. Prouver que $\left(\overrightarrow{\text{CB}},\ \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

(On admet de même que $\left(\overrightarrow{\text{CA}},\ \overrightarrow{\text{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?