Devoir surveillé

durée : 1h15

Exercice 1 — 2 points

Pour chaque affirmation , indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Affirmation 1 : l'équation $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$ admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(4z^2-20z+37\right)(2z-7+2\mathrm{i})=0.$$

Affirmation 2 : les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

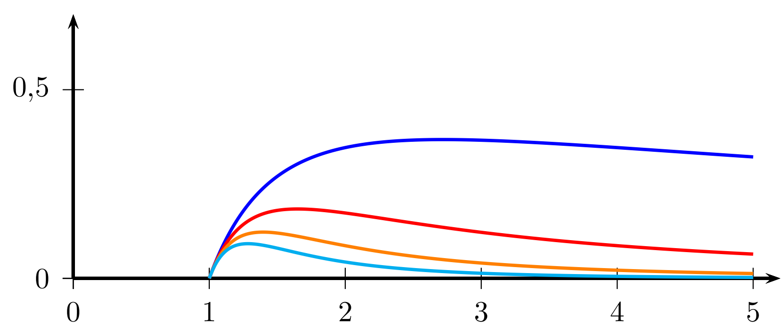
Exercice 2 — 8 points

On considère, pour tout entier $n>0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ par :

$$f_n(x)=\frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n>0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n>0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$f_n'(x)=\frac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n>0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y=\frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier $n>1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$0\leqslant\frac{\ln(x)}{x^n}\leqslant\frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b. Montrer que pour tout entier $n>1$:

$$\int_1^5\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c. Pour tout entier $n>0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x=1$, $x=5$, $y=0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.