Devoir surveillé

TermS

durée : 2h00

31 janvier 2020

Exercice 1

8 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - i = i(z + 1)$ a pour solution $1 + i$.

Affirmation 2 : Un point M d'affixe z tel que $|z - i| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 3 : L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Affirmation 4 : L'argument du nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^{2019}$ vaut 0 modulo 2π .

Exercice 2

12 points

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M .

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n , on note T_n la température du café à l'instant n , avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n + 1$ par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où k est une constante réelle.

Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $T_n \geq 10$

c. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .

d. La suite (T_n) est-elle convergente? Si oui, déterminer sa limite?

3. On considère l'algorithme suivant :

a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n .

Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Tant que $T \geq 40$
$T \leftarrow 0,8T + 2$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t , avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité : $\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M)$.

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(t) = \frac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}$.

Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

b. En conservant l'hypothèse du a., calculer $f(0)$.

En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

c. Vérifier que la fonction θ trouvée en b. est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0; +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t , et que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70e^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

Une personne aime boire son café à 40°C .

Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0; +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$. Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

3. Sachant que $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$. En déduire l'équation d'une asymptote à la fonction g .

Devoir surveillé

TermS

durée : 2h00

31 janvier 2020

Exercice 1

8 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - i = i(z + 1)$ a pour solution $1 + i$.

Affirmation 2 : Un point M d'affixe z tel que $|z - i| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 3 : L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Affirmation 4 : L'argument du nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^{2019}$ vaut 0 modulo 2π .

Exercice 2

12 points

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M .

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n , on note T_n la température du café à l'instant n , avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n + 1$ par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où k est une constante réelle.

Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
- b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $T_n \geq 10$
- c. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
- d. La suite (T_n) est-elle convergente? Si oui, déterminer sa limite?

3. On considère l'algorithme suivant :

- a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n .
Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme?
- b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Tant que $T \geq 40$
 $T \leftarrow 0,8T + 2$
 $n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t , avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité : $\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M)$.

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

- a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(t) = \frac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
- b. En conservant l'hypothèse du a., calculer $f(0)$.
En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.
- c. Vérifier que la fonction θ trouvée en b. est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0; +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t , et que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70e^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

Une personne aime boire son café à 40°C .

Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0; +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$. Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

3. Sachant que $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$. En déduire l'équation d'une asymptote à la fonction g .